MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH
ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH
FELIX KLEIN DAVID HILBERT
OTTO BLUMENTHAL ERICH HECKE

122. Band · 5. (Schluß-)Heft

(ABGESCHLOSSEN AM 7. FEBRUAR 1951)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1951

Math. Ann.

An unsere Mitarbeiter!

Die Korrekturkosten sind bei den „Mathematischen Annalen" sehr hoch. Sie betragen nach einer Kalkulation 6% des Gestehungspreises eines Bandes. Für ihre Verminderung muß unbedingt Sorge getragen werden. Wir richten deshalb an alle unsere Mitarbeiter die freundliche dringende Bitte, zu diesem Ziele an ihrem Teile mit beitragen zu wollen. Dazu ist nötig:

1. Das Manuskript muß *völlig druckfertig* und *gut leserlich* sein (Schreibmaschine oder klare Handschrift, Formeln im allgemeinen handschriftlich). Vorkommende gotische oder griechische Buchstaben sowie einander ähnelnde Zeichen sind besonders zu kennzeichnen, z. B. durch farbige Unterstreichung. Etwaige Abbildungen sind als Skizzen auf besonderen Blättern zu bringen. Die Abbildungs-Unterschriften gehören dagegen zum Text und sind dem Manuskript beizugeben.

2. Veränderungen des Textes in der Korrektur sind auf die Fälle zu beschränken, wo sich nachträglich *wirkliche Irrtümer* herausstellen. Sollte ein Irrtum bemerkt werden, bevor noch Korrektur eingetroffen ist, dann ist ein verbesserter Text sofort an die Redaktion zu schicken, die dafür Sorge tragen wird, daß das Manuskript noch vor dem Satz berichtigt wird.

Insbesondere sind rein stilistische Verbesserungen zu unterlassen. Größere Änderungen und Zusätze, die sich nicht auf die Berichtigung von Irrtümern beschränken, bedürfen der Zustimmung der Redaktion und sollen, auch um der geschichtlichen Genauigkeit willen, in einer Fußnote als nachträglich gekennzeichnet und datiert werden.

Als Norm soll gelten, daß der Verfasser von jeder Arbeit *eine Fahnenkorrektur und eine Korrektur in Bogen* liest. Wir bitten unsere Verfasser, sich hiermit begnügen zu wollen.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen.

Vertriebs-Vertretung im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London, W. C. 2

Die MATHEMATISCHEN ANNALEN

erscheinen zwanglos in Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Sie sind durch jede Buchhandlung zu beziehen. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließende Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind und die auch nachträglich nicht anderweitig innerhalb dieses Zeitraumes zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Mathematischen Annalen bestimmte Manuskripte können bei jedem der unten verzeichneten Redaktionsmitglieder eingereicht werden:

Inhaltsverzeichnis des Heftes auf Seite III

Math. Annalen, Bd. 122, S. 343—368 (1951).

Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung.

Von

Franz Rellich in Göttingen.

Wir betrachten das singuläre Eigenwertproblem

$$-(p(x)\,u')' + q(x)\,u = \lambda\, k(x)\, u \qquad l < x < m \tag{1}$$

unter denselben allgemeinen Voraussetzungen über die Koeffizienten, wie sie Weyl[1]) seiner Theorie zugrundegelegt hat; insbesondere ist $l = -\infty$ bzw. $m = +\infty$ zugelassen (vgl. Formelzeile (2)). Die Gesamtheit aller komplexwertigen $u(x)$, für die im Sinne von Lebesgue $\int\limits_l^m |u(x)|^2\, k(x)\, d\,x < \infty$ ausfällt, nennen wir den Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ mit dem inneren Produkt $(v, u) = \int\limits_l^m \overline{v(x)}\, u(x)\, k(x)\, d\,x$. Dann wird das Eigenwertproblem formal zu einem solchen des Operators $A\,u = \frac{1}{k}\{-(p\,u')' + q\,u\}$, nämlich $A\,u = \lambda\,u$. Der Operator A kann nur auf einem Teilraum $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{H}$ erklärt werden, weil für die u, auf die A wirkt, Differenzierbarkeitseigenschaften und außerdem (wenn bei $x = l$ oder $x = m$ der Grenzkreisfall vorliegt) Randbedingungen erfüllt sein müssen. Im allgemeinen gibt es entsprechend den gestellten Randbedingungen unendlich viele wesentlich verschiedene Teilräume $\mathfrak{A}$ und daher auch verschiedene Operatoren A in $\mathfrak{A}$. Ein solcher Operator A in $\mathfrak{A}$ heißt halbbeschränkt, wenn der Quotient $(u, A\,u) : (u, u)$ für alle $u \neq 0$ aus $\mathfrak{A}$ oberhalb einer festen Zahl a bleibt; eine äquivalente Formulierung wäre: wenn das Spektrum von A oberhalb a bleibt. Zum Beispiel ist beim Eigenwertproblem $-u'' = \lambda\,u, 0 \leq x \leq 1$ der Operator $A\,u = u''$ im Bereich $\mathfrak{A}$ aller in $0 \leq x \leq 1$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen mit den Randbedingungen $u(0) = 0$, $u(1) = 0$ halbbeschränkt, weil $(u, A\,u) \Big/ (u, u) = \int\limits_0^1 |u'|^2\, d\,x \Big/ \int\limits_0^1 |u|^2\, d\,x \geq 0$ (sogar $\geq \pi^2$) ist. Auch die Operatoren zu anderen Randbedingungen $a_1\, u(0) + b_1\, u'(0) = 0$, $a_2\, u(1) + b_2\, u'(1) = 0$ sind alle halbbeschränkt und dasselbe gilt allgemein für jedes reguläre Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem. Es sind aber auch viele singuläre Differentialoperatoren halbbeschränkt, die in der Quantenphysik eine Rolle spielen: das ist verständlich, weil sie Energieoperatoren sind und ihr Spektrum nicht nach $-\infty$ reichen sollte.

Für solche halbbeschränkten Operatoren A hat K. Friedrichs[2]) unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen über die Koeffizienten der Differentialgleichung gezeigt, daß man unter den unendlich vielen möglichen Randbedingungen eine als eine „ausgezeichnete" Randbedingung auffassen kann.

[1]) Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. Math. Ann. **68**, 220 (1910). Außerdem Göttinger Nachrichten 1909, S. 37 und 1910, S. 442.

[2]) Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halbbeschränkten gewöhnlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Math. Ann. **112**, 1 (1936).

Hier wird die Friedrichsche Charakterisierung ohne jede zusätzliche Voraussetzung über die Koeffizienten p, q, k gewonnen werden. Außerdem werden zwei neue Charakterisierungen der „ausgezeichneten“ Randbedingung hergeleitet. Die eine (§ 3) erfordert nicht einmal die Halbbeschränktheit des Operators, sondern nur die Halbbeschränktheit an dem Ende, an welchem die ausgezeichnete Randbedingung formuliert wird. Die andere (§ 6) besagt: unter den verschiedenen Randbedingungen gibt es eine, bei welcher der Operator A größer wird als bei jeder anderen. Dabei muß natürlich die Beziehung $A \geqq B$ für nicht beschränkte Operatoren erst definiert werden, was in § 6 in ausführlicher Analyse geschieht. Der Vorteil dieser Charakterisierung scheint mir zu sein, daß sie unmittelbar Aussagen über das Spektrum von der Art erlaubt, wie sie von R. COURANT[3]) im nicht singulären Fall bewiesen worden sind.

Bei den singulären Eigenwertproblemen der mathematischen Physik wird fast immer die „ausgezeichnete“ Randbedingung stillschweigend zugrunde gelegt: z. B. bei der Schrödingergleichung des Keplerproblems im S-Zustand $u'' + \frac{2}{r}\, u' + \frac{2Z}{r}\, u + \lambda u = 0$, $0 < r < \infty$ $(p = r^2,\ q = -2Zr,\ k = r^2)$ in der Form „$u(r)$ stetig auch bei $r = 0$“, obwohl bei $r = 0$ unendlich viele andere Randbedingungen möglich wären[4]). Unsere Charakterisierung besagt, daß der Hamiltonoperator, also der Energieoperator der Schrödingergleichung bei der „ausgezeichneten“ Randbedingung maximal ausfällt; das Stellen einer anderen Randbedingung hat also dieselbe Wirkung wie das Hinzufügen einer anziehenden Kraft. Sind λ_n die negativen Eigenwerte der ausgezeichneten Randbedingung $\left(\text{also } \lambda_n = -\frac{Z^2}{n^2}\right)$ und μ_n die einer anderen Randbedingung bei $r = 0$, dann gilt $\lambda_n \geqq \mu_n$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ (§ 6, Satz 6).

Ein Beispiel im § 7 zeigt, daß bei halbbeschränktem Operator das Integral $\int_l^m (p\,|u'|^2 + q\,|u|^2)\,dx$ sehr wohl divergieren kann (gemeint als uneigentliches Integral, also als Grenzwert von $\int_a^b (p\,|u'|^2 + q\,|u|^2\,dx$ für $b \to m$ und $a \to l$) für geeignetes $u(x)$ und beliebiger Randbedingung, insbesondere also auch bei der ausgezeichneten Randbedingung. Für die ausgezeichnete Randbedingung läßt sich aber $\int_l^m (p\,|u'|^2 + q\,|u|^2)\,dx$ sinnvoll als Grenzwert von $\int_l^m (p\,|u_n|^2 + q\,|u_n|^2)\,dx$ für $n \to \infty$ erklären, wobei die Folge $u_n(x)$ in der Umgebung von $x = l$ und $x = m$ identisch verschwindet.

§ 1. Die Randbedingungen in der Weylschen Theorie.

Zunächst werden bekannte Sätze über Randbedingungen ohne Beweis zusammengestellt.

Die Koeffizienten unserer Gleichung (1) sind in der ganzen Arbeit den folgenden Einschränkungen unterworfen:

---

[3]) Vgl. R. COURANT u. D. HILBERT: Methoden der mathem. Physik, Bd. I, 2. Aufl., u. a. Satz 5 auf S. 356.

[4]) Vgl. den § 4 meiner Arbeit „Die zulässigen Randbedingungen ...“. Math. Z. **49**, 702 (1944).

(2) $p(x)$, $p'(x)$ reell und stetig; $q(x)$, $k(x)$ reell und stückweise stetig[5]); $p(x) > 0$, $k(x) > 0$; alles im offenen Intervall $l < x < m$, wobei $l = -\infty$ oder $m = +\infty$ oder beides zugelassen wird.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{W}$ die Gesamtheit aller $u(x)$ mit den Eigenschaften:

(3) 1. $u(x)$, $u'(x)$ komplexwertig und stetig, $u''(x)$ stückweise stetig in $l < x < m$.

2. $\int_l^m |u|^2 k\, d\, x < \infty$, $\int_l^m \frac{1}{k} \left| -(p\,u')' + q\,u \right|^2 d\, x < \infty$.

Dann ist $\mathfrak{W}$ ein Teilraum des eingangs erklärten Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ und der Operator

(4) $$A\,u = \frac{1}{k}\left(-(p\,u')' + q\,u\right)$$

ist in $\mathfrak{W}$ erklärt. Wenn an einem Intervallende, etwa bei $x = l$, der Grenzpunktfall vorliegt (für jedes reelle oder komplexe λ gibt es eine Lösung von (1), für die $\int_l^r |u|^2 k\, d\, x = \infty$ gilt mit jedem r aus $l < r < m$), dann ist bei $x = l$ keine $\mathfrak{W}$ einschränkende Randbedingung zu stellen. Wenn aber an einem Ende der Grenzkreisfall vorliegt (für jedes reelle oder komplexe λ haben alle Lösungen die Eigenschaft $\int_l^r |u|^2 k\, d\, x < \infty$), dann muß $\mathfrak{W}$ durch eine Randbedingung an diesem Ende eingeschränkt werden. Zu ihrer Formulierung benutzen wir Ausdrücke der Form

$$[v, u]_x = p(x)\left(\bar{v}'(x)\,u(x) - \bar{v}(x)\,u'(x)\right) \quad \text{und} \quad [v, u]_l = \lim_{x \to l} [v, u]_x$$
$$\text{und} \quad [v, u]_m = \lim_{x \to m} [v, u]_x .$$

Es existiert $[v, u]_l$ für alle u, v aus $\mathfrak{W}$ aber sogar für alle u, v aus $\mathfrak{W}_l$, wenn $\mathfrak{W}_l$ so erklärt ist, daß in den Forderungen (3) überall m ersetzt wird durch ein r mit $l < r < m$; erklärt man entsprechend $\mathfrak{W}_m$ so, daß in (3) überall l ersetzt wird durch ein r mit $l < r < m$, dann ist $[v, u]_m$ vorhanden für alle u, v aus $\mathfrak{W}_m$.

Nun sei bei $x = l$ der Grenzkreisfall gegeben. Man wähle irgend eine nicht identisch verschwindende Lösung $\alpha(x)$ der Gleichung

(5) $$-(p\,z')' + q\,z = i\,k\,z$$

mit $[\alpha, \alpha]_l = 0$; dieses α liegt vielleicht nicht in $\mathfrak{W}$, aber sicher in $\mathfrak{W}_l$. Dann ist $\mathfrak{W}$ durch die Randbedingung einzuschränken

(6) $$[\alpha, u]_l = 0.$$

Wenn bei $x = m$ der Grenzpunktfall vorliegt, ist (6) die einzige Einschränkung und man erhält durch verschiedene Wahl von α unendlich viele wesentlich verschiedene Teilräume $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{W}$ bzw. Operatoren A in $\mathfrak{A}$.

Liegt bei $x = m$ der Grenzkreisfall vor, dann wähle man eine Lösung $\beta(x)$ von (5), für die $p(\alpha'\beta - \alpha\beta') = 1$ und $[\beta, \beta]_m = 0$ ist, und stelle die Randbedingung

(7) $$[\beta, u]_m = 0 .$$

---

[5]) Eine Funktion $f(x)$ heißt in $l < x < m$ stückweise stetig, wenn sie in jedem abgeschlossenen Teilintervall bis auf endlich viele Sprungstellen stetig ist.

Liegt gleichzeitig bei $x = l$ der Grenzpunktfall vor, dann ist außer (7) keine Randbedingung zu fordern; liegt bei $x = l$ der Grenzkreisfall vor, dann ist neben (7) noch (6) zu verlangen.

In allen Fällen bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}$ die durch die genannten Randbedingungen eingeschränkten Teilräume von $\mathfrak{W}$. Jedes $u(x)$ aus $\mathfrak{A}$ erlaubt die Darstellung

$$(8) \qquad u(x) = \beta(x) \int_l^x \alpha(\xi) j(\xi) k(\xi) d\xi + \alpha(x) \int_x^m \beta(\xi) j(\xi) k(\xi) d\xi$$

mit einem in $l < x < m$ stückweise stetigen $j(x)$ aus $\mathfrak{H}$. Dabei sind $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ Lösungen von (5), die zu $\mathfrak{W}_l$ bzw. zu $\mathfrak{W}_m$ gehören, für die $[\alpha, \alpha]_l = 0$, $[\beta, \beta]_m = 0$ und $p(\alpha' \beta - \alpha \beta') = 1$ ist. Es ist $(A - i) u = j$ und es gilt $\int_l^m |u|^2 k\, dx \leqq \int_l^m |j|^2 k\, dx$. A ist ein reeller Operator, d. h. mit $u(x)$ liegt auch $\bar{u}(x)$ in $\mathfrak{A}$ und es ist $A\bar{u} = \overline{Au}$. Dieses sind in einer etwas abgewandelten Formulierung die Resultate von WEYL und STONE, vgl. insb. Kapitel X des Buches von STONE[6]).

Die Operatoren A in $\mathfrak{A}$ sind natürlich Hermitesch, und sie können durch Abschließen fortgesetzt werden zu Operatoren A in $\hat{\mathfrak{A}}$, wobei $\hat{\mathfrak{A}}$ durch (8) erklärt wird, aber jetzt $j(x)$ in $l < x < m$ nicht mehr stückweise stetig, sondern Lebesgue meßbar mit $\int_l^m |j|^2 k\, dx < \infty$ ist. Man nennt A in $\hat{\mathfrak{A}}$ selbstadjungiert und A in $\mathfrak{A}$ wesentlich selbstadjungiert (§ 6, Definition 2). Es ist bekanntlich ein reeller Operator A in einem Teilraum $\dot{\mathfrak{A}}$ dann und nur dann wesentlich selbstadjungiert, wenn der Teilraum $\dot{\mathfrak{A}}$ durch den Operator $A - i$ umkehrbar eindeutig auf einen dichten Teilraum $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{H}$ abgebildet wird.

Es liegt nahe, die Schwierigkeiten an den singulären Endpunkten dadurch zu umgehen, daß man an Stelle des Funktionenraumes $\mathfrak{A}$ denjenigen Teilraum von $\mathfrak{A}$ betrachtet, bei dem alle $u(x)$ in der Umgebung von $x = l$ bzw. $x = m$ identisch verschwinden. Ist das erlaubt? Offenbar dann, wenn der Operator A auch noch in diesem Teilraum wesentlich selbstadjungiert ist.

Wir setzen nun an Stelle von $\mathfrak{A}$ den Raum $\dot{\mathfrak{A}}_m$ (bzw. $\dot{\mathfrak{A}}_l$), bestehend aus allen $u(x)$ von $\mathfrak{A}$, die in der Umgebung von $x = m$ (bzw. $x = l$) identisch verschwinden[7]); $\dot{\mathfrak{W}}$ sei die Gesamtheit aller $u(x)$ aus $\mathfrak{W}$, die in der Umgebung beider Enden identisch verschwinden.

Satz 1. *Es ist A in $\dot{\mathfrak{A}}_m$ bzw. in $\dot{\mathfrak{W}}$ dann und nur dann wesentlich selbstadjungiert, wenn bei $x = m$, bzw. wenn bei $x = l$ und bei $x = m$ der Grenzpunktfall vorliegt.*

Beweis. I. Wenn $u(x) \equiv 0$ in $s < x < m$, dann ist das nach (8) zu u gehörige $j(x)$ auch identisch gleich Null in $s < x < m$, weil $j = \frac{1}{k}\{-(p u')' + q u\} - i u$. Aus $u(x) = \beta(x) \int_l^x \alpha(\xi) j(\xi) k(\xi) d\xi$ für $s < x < m$ folgt weiter $\int_l^x \alpha(\xi) j(\xi) k(\xi) d\xi = 0$ für $s < x < m$, also auch $\int_l^m \alpha(x) j(x) k(x) dx = 0$. Umgekehrt sei $\mathfrak{S}$ die Gesamtheit aller stückweise stetigen $j(x)$ mit $\int_l^m |j|^2 k\, dx < \infty$.

[6]) M. H. STONE, Linear transformations in Hilbert space. New York 1932.

[7]) Diese Umgebung ist keine feste Umgebung, sondern hängt von $u(x)$ ab.

die in der Umgebung von $x = m$ identisch verschwinden und für die $\int_l^m \alpha j k\, d\, x = 0$ ist. Dann liegt jedes $u(x)$ der Form (8) in $\dot{\mathfrak{A}}_m$, wenn $j(x)$ aus $\mathfrak{S}$ gewählt wird. Es ist A in $\dot{\mathfrak{A}}_m$ wesentlich selbstadjungiert dann und nur dann, wenn $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{H}$ dicht liegt. Das ist nach dem unten angeführten Hilfssatz 1 der Fall, wenn $\int_l^m |\alpha|^2 k\, d\, x = \infty$ ist (Grenzpunktfall bei $x = m$) und es ist nicht der Fall, wenn $\int_l^m |\alpha|^2 k\, d\, x < \infty$ ist (offenbar Grenzkreisfall bei $x = m$).

II. Sei $\mathfrak{S}$ der Raum aller stückweise stetigen Funktionen $j(x)$, die in der Umgebung sowohl von $x = l$ als auch von $x = m$ identisch verschwinden und für die außerdem $\int_l^m \alpha j k\, d\, x = 0$, $\int_l^m \beta j k\, d\, x = 0$ ist. Wieder bilden die $u(x)$, welche nach (8) zu diesen $j(x)$ aus $\mathfrak{S}$ gehören, den Raum $\dot{\mathfrak{W}}$. Nach dem Hilfssatz 1 liegt $\mathfrak{S}$ dicht in $\mathfrak{H}$ dann und nur dann, wenn $\int_l^m |\alpha|^2 k\, d\, x = \infty$ und $\int_l^m |\beta|^2 k\, d\, x = \infty$ ist, also wenn bei $x = l$ und bei $x = m$ der Grenzpunktfall gegeben ist. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Hilfssatz 1. *Die Funktionen $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_h(x)$ seien in $l < x < m$ meßbar und für jedes endliche Teilintervall $a \leq x \leq b$ sei $\int_a^b |\alpha_i|^2 k\, d\, x < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, h$; $k(x)$ positiv und stückweise stetig in $l < x < m$. In $l < x < m$ seien die $\alpha_i(x)$ linear unabhängig. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{H}$ den Hilbertschen Raum aller $u(x)$ mit $\int_l^m |u|^2 k\, d\, x < \infty$ und dem inneren Produkt $(v, u) = \int_l^m \bar{v} u k\, d\, x$ und mit $\mathfrak{S}$ den Teilraum, der alle $v(x)$ aus $\mathfrak{H}$ umfaßt, die in der Umgebung von $x = l$ und $x = m$ identisch verschwinden und für die $\int_l^m \alpha_i v k\, d\, x = 0$, $i = 1, 2, \ldots, h$ ist. Behauptung: $\mathfrak{S}$ liegt dicht in $\mathfrak{H}$ dann und nur dann, wenn für jede von $c_1 = c_2 = \cdots = c_h = 0$ verschiedene Wahl der Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_h$ gilt $\int_l^m |c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \cdots + c_h \alpha_h|^2 k\, d\, x = \infty$.*

Beweis. I. Die Bedingung ist notwendig. Wäre nämlich mit geeigneten c_i, die nicht alle verschwinden, $\int_l^m |c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \cdots + c_h \alpha_h|^2 k\, d\, x < \infty$, so läge $f(x) = c_1 \alpha_1(x) + c_2 \alpha_2(x) + \cdots + c_h \alpha_h(x)$ in $\mathfrak{H}$ und es wäre $f(x) \not\equiv 0$ in $l < x < m$, weil die α_i in $l < x < m$ linear unabhängig vorausgesetzt sind. Außerdem aber wäre $\int_l^m f v k\, d\, x = 0$ für alle v aus $\mathfrak{S}$, also $\mathfrak{S}$ nicht dicht in $\mathfrak{H}$.

II. Die Bedingung ist hinreichend. Das beweisen wir indirekt. Wäre sie es nicht, dann gäbe es ein $f(x) \not\equiv 0$ aus $\mathfrak{H}$, so daß $\int_l^m f v k\, d\, x = 0$ für alle v aus $\mathfrak{S}$ Wir werden im Widerspruch dazu $\int_a^b f k\, d\, x = 0$ nachweisen für jedes Intervall $a \leq x \leq b$ aus $l < x < m$.

Wir wählen $v(x) = 1$ in $a \leqq x \leqq b$ und $v(x) = \sum_{i=1}^{h} z_i \overline{\alpha_i(x)}$ in Δ mit noch zu bestimmenden Konstanten z_i, wobei Δ die Vereinigung zweier endlicher Intervalle Δ_1, Δ_2 aus $l < x < m$ sein soll, die zueinander und zu $a \leqq x \leqq b$ punktfremd sein sollen; $v(x) = 0$ sonst. Damit $v(x)$ zu $\mathfrak{S}$ gehört, müßten die z_i so bestimmt werden, daß $\int_a^b \alpha_i k\, d\, x + \sum_j z_j \int_\Delta \overline{\alpha}_j \alpha_i k\, d\, x = 0$ oder $p_i + \sum_{j=1}^{h} a_{ji} z_j = 0$ mit den Abkürzungen $p_i = \int_a^b \alpha_i k\, d\, x$ und $a_{ji} = \int_\Delta \overline{\alpha}_j \alpha_i k\, d\, x$. Diese Gleichungen sind eindeutig auflösbar, wenn der kleinste Eigenwert $\varkappa$ der Hermiteschen Matrix a_{ji} positiv ausfällt, und es ist dann $\sum_{i=1}^{h} |z_j|^2 \leqq \frac{1}{\varkappa^2} \sum_{i=1}^{h} |p_i|^2$. Also $\int_\Delta |v|^2 k\, d\, x = \sum_{i,j=1}^{h} \overline{z}_i z_j a_{ji} = -\sum_i p_i \overline{z}_i \leqq (\sum_i |p_i|^2)^{\frac{1}{2}} \times$ $\times \frac{1}{\varkappa} \left(\sum_{i=1}^{h} |p_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sum_i |p_i|^2}{\varkappa}$.

Das Intervall Δ wird so bestimmt. Es seien r_n und s_n monotone Folgen mit $l < r_n < a < b < s_n < m$ und $\lim_{n\to\infty} r_n = l$, $\lim_{n\to\infty} s_n = m$. Unter $\Delta = \Delta(n)$ werde die Vereinigung der beiden Intervalle $r_n \leqq x < a$ und $b < x \leqq s_n$ verstanden. Setzt man $F_n(c_1, c_2, \ldots, c_h) = \int_{\Delta(n)} \left| \sum_{i=1}^{h} c_i \alpha_i \right|^2 k\, d\, x$, dann wird das eben definierte $\varkappa = \varkappa(n) = \min F_n(c_1, c_2, \ldots, c_h)$ für $|c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots + |c_h|^2 = 1$. Aus der Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} F_n(c_1, c_2, \ldots, c_h) = \infty$ für $|c_1|^2 + |c_2|^2 + \cdots +$ $+ |c_h|^2 = 1$ und der Monotonie $F_{n'}(c_1, c_2, \ldots, c_h) \geqq F_n(c_1, c_2, \ldots, c_h)$ für $n' \geqq n$ folgt nach dem HEINE-BORELschen Überdeckungssatz leicht, daß $\lim_{n\to\infty} \varkappa(n) = \infty$ ist.

Aus $\int_a^b f k\, d\, x + \int_{\Delta(n)} f v k\, d\, x = 0$ folgt nun $\left| \int_a^b f k\, d\, x \right|^2 \leqq \int_{\Delta(n)} |f|^2 k\, d\, x \times$ $\times \int_{\Delta(n)} |v|^2 k\, d\, x \leqq \int_l^m |f|^2 k\, d\, x \cdot \frac{1}{\varkappa(n)} \sum_{i=1}^{h} \left| \int_a^b \alpha_i k\, d\, x \right|^2$ und daraus durch $n \to \infty$ das gewünschte $\int_a^b f k\, d\, x = 0$. Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen; sein Beweis stammt zum Teil von Herrn J. NITSCHE.

§ 2. Halbbeschränktheit an einem Ende und Nullstellenfreiheit.

Schlüsse und Sätze dieses Paragraphen sind elementar und beruhen auf der vielverwendeten Heranziehung nullstellenfreier Lösungen der Eigenwertgleichung.

Wenn der Operator A (der Gestalt (4)) in irgendeinem der in der Einleitung genannten Teilräume $\mathfrak{A}$ halbbeschränkt ist, dann muß er es auch in dem Teilraum $\mathfrak{W}$ sein, der alle $u(x)$ aus $\mathfrak{B}$ (vgl. Formelzeile (3)) umfaßt, die in der Umgebung von $x = l$ und $x = m$ identisch verschwinden. Da auch das umgekehrte richtig ist (§ 4, Satz 4), sind wir berechtigt, mit Friedrichs zu definieren: „A ist halbbeschränkt", wenn A in $\mathfrak{W}$ halbbeschränkt ist. Wenn A nicht halbbeschränkt ist, dann kann daran sowohl das linke Ende $x = l$ als auch das rechte Ende $x = m$ Schuld haben. Deshalb gliedern wir auf. Wir nennen A halbbeschränkt am linken Ende $x = l$, wenn es ein r mit

$l < r < m$ gibt, so daß A in demjenigen Teilraum von $\dot{\mathfrak{W}}$ halbbeschränkt ist, der alle $u(x)$ aus $\mathfrak{W}$ umfaßt, die in $r < x < m$ identisch verschwinden. Eine Funktion $u(x)$ aus diesem Teilraum verschwindet also einmal identisch in dem für alle $u(x)$ gleichbleibenden Intervall $r \leqq x < m$ und außerdem in einer mit $u(x)$ wechselnden Umgebung von $x = l$. Wir nennen A halbbeschränkt am rechten Ende $x = m$, wenn es ein r mit $l < r < m$ gibt, so daß A in demjenigen Teilraum von $\dot{\mathfrak{W}}$ halbbeschränkt ist, der alle $u(x)$ umfaßt, die in $l < x \leqq r$ identisch verschwinden.

Wenn es eine reelle Lösung $z(x)$ von $-(p z')' + q z = \lambda k z$ gibt, die in $l < x \leqq s$ nicht verschwindet, dann gibt es bekanntlich zu jeder nicht identisch verschwindenden Lösung $u(x)$ ein Intervall $l < x \leqq t$, wo $u(x)$ nicht Null wird. (Z. B. weil nach Satz 3 jedenfalls $u = c_1 \psi + c_2 \omega = \left(c_1 + c_2 \frac{\omega}{\psi}\right) \psi$ mit $\psi \neq 0$, $\omega \neq 0$ in $l < x \leqq s$ und $\frac{\omega}{\psi} \to 0$, $x \to l$ gilt). Also: entweder haben alle nicht identisch verschwindenden reellen Lösungen unendlich viele Nullstellen mit dem Häufungspunkt $x = l$ oder keine einzige. Im ersten Fall heißt die Differentialgleichung oszillatorisch am linken Ende, im zweiten Falle nichtoszillatorisch am linken Ende. Entsprechend definiert man am rechten Ende.

Satz 2a.[8]) *Es ist A halbbeschränkt am linken Ende, wenn es eine Zahl λ gibt, mit der die Differentialgleichung $-(p z')' + q z = \lambda k z$ nichtoszillatorisch wird. Entsprechend am rechten Ende.*

Beweis. Sei $-(p z')' + q z = \lambda k z$ und $z \neq 0$ und reell in $l < x \leqq r$. Sei $u(x)$ ein Element aus $\dot{\mathfrak{W}}$, das in $r \leqq x < m$ identisch verschwindet. Dann ist $(u, A u) = \int_l^r (p(x) |u'|^2 + q(x) |u|^2)\, d x$. Setzt man mit einem seit Jacobi geläufigen Kunstgriff $\frac{z'(x)}{z(x)} = f(x)$ in $l < x \leqq r$, dann hat man $q(x) = (p f)' + p f^2 + \lambda k$, also $(u, A u) = \int_l^r (p |u'|^2 + (p f)' |u|^2 + p f^2 |u|^2)\, d x + \int_l^r \lambda |u|^2 k\, d x = \int_l^r p |u' - f u|^2\, d x + \lambda \int_l^r |u|^2 k\, d x \geqq \lambda (u, u)$, also A halbbeschränkt am linken Ende.

Satz 2b.[8]) *Es ist A nicht halbbeschränkt am linken Ende, wenn es zu jedem reellen α ein $\lambda < \alpha$ gibt, mit dem die Differentialgleichung $-(p z')' + q z = \lambda k z$ oszillatorisch am linken Ende wird.*

Oder in äquivalenter Formulierung: *Wenn A halbbeschränkt am linken Ende ist, dann gibt es ein α derart, daß für jedes $\lambda < \alpha$ die Differentialgleichung $-(p z')' + q z = \lambda k z$ nichtoszillatorisch wird. Entsprechend am rechten Ende.*

Beweis. Wir nehmen im Widerspruch zur Behauptung an, es sei $(u, A u) \geqq \alpha (u, u)$ für alle u aus $\dot{\mathfrak{W}}$, die identisch verschwinden in $r \leqq x < m$. Sei $\lambda < \alpha$ und $z(x) \not\equiv 0$ eine reelle Lösung von $-(p z')' + q z = \lambda k z$. Wir werden zeigen: $z(x)$ hat in $l < x \leqq r$ höchstens eine Nullstelle. Wären nämlich

[8]) Unter der zusätzlichen Annahme, daß der Grenzpunktfall am linken Ende vorliegt und $k = 1$ ist, ist Satz 2a enthalten in einem Theorem von Hartman Ph.: Differential equations with non-oscillatory eigen functions Duke math. J. 15, 697 — 709, (1948) und ist Satz 2b enthalten in einem Theorem von Hartman, Ph. u. A. Wintner: On the orientation of unilateral spectra, Amer. J. Math. 70 309—316 insb. 313 (1948).

x_1 und x_2 zwei solche, dann setze man mit positivem σ, das sogleich näher bestimmt wird (für das aber jedenfalls $l < x_1 - \sigma < x_1 < x_2 + \sigma < r$ sein soll), $u(x) = 0$ in $l < x \leqq x_1 - \sigma$, $u(x) = \xi(x)$ in $x_1 - \sigma < x < x_1$, $u(x) = z(x)$ in $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $u(x) = \xi(x)$ in $x_2 < x \leqq x_2 + \sigma$, $u(x) = 0$ in $x_2 + \sigma < x < m$. Dabei sollen $\xi(x)$ und σ reell so gewählt werden, daß einmal $u(x)$ ein Element aus $\dot{\mathfrak{W}}$ wird (was z. B. $\xi(x_1) = z(x_1)$, $\xi'(x_1) = z'(x_1)$, $\xi(x_1 - \sigma) = \xi'(x_1 - \sigma) = 0$ verlangt) und außerdem $\int\limits_{x_1-\sigma}^{x_1} (p\,\xi'^2 + q\,\xi^2)\,d\,x + \int\limits_{x_2}^{x_2+\sigma} (p\,\xi'^2 + q\,\xi^2)\,d\,x < (\alpha - \lambda) \int\limits_{x_1}^{x_2} z^2 k\,d\,x$ ausfällt; das ist möglich, weil $z(x_1) = z(x_2) = 0$ ist und $z(x)$ in $x_1 \leqq x \leqq x_2$ nicht identisch verschwindet. Nun wird $\alpha \int\limits_{x_1-\sigma}^{x_2+\sigma} u^2 k\,d\,x \leqq (u, A\,u) = \int\limits_{x_1-\sigma}^{x_2+\sigma} (p\,u'^2 + q\,u^2)\,d\,x < \int\limits_{x_1}^{x_2} (p\,z'^2 + q\,z^2)\,d\,x + (\alpha - \lambda) \int\limits_{x_1}^{x_2} z^2 k\,d\,x = \alpha \int\limits_{x_1}^{x_2} z^2 k\,d\,x \leqq \alpha \int\limits_{x_1-\sigma}^{x_2+\sigma} u^2 k\,d\,x$, also $\alpha \int\limits_{x_1-\sigma}^{x_2+\sigma} u^2 k\,d\,x < \alpha \int\limits_{x_1-\sigma}^{x_2+\sigma} u^2 k\,d\,x$, und das ist ein Widerspruch, weil $u(x)$ in $x_1 \leqq x \leqq x_2$ nicht identisch verschwindet. Damit ist gezeigt, daß es zu $\lambda < \alpha$ gewiß keine Lösung $z(x)$ geben kann, die in der Umgebung des linken Endes unendlich viele Nullstellen hätte.

S a t z 2c. *Wenn A halbbeschränkt ist, also $(u, A\,u) \geqq \alpha(u, u)$ für u aus $\dot{\mathfrak{W}}$, dann hat jede reelle Lösung $z(x) \not\equiv 0$ von $-(p\,z')' + q\,z = \lambda\,k\,z$ in $l < x < m$ höchstens eine Nullstelle, sofern $\lambda < \alpha$ genommen wird.*

Der Beweis ergibt sich aus dem Beweis des vorangehenden Satzes, indem man dort r durch m ersetzt.

S a t z 2d. *Es ist A dann und nur dann halbbeschränkt, wenn A sowohl am linken als auch am rechten Ende halbbeschränkt ist.*

B e w e i s. Wenn A halbbeschränkt ist, dann natürlich auch halbbeschränkt am linken Ende und am rechten Ende.

Sei umgekehrt A an beiden Enden halbbeschränkt. Nach Satz 2b gibt es dann ein λ (genügend nahe an $-\infty$), zu dem eine reelle Lösung $z(x)$ gehört, deren Nullstellen sich weder bei $x = l$ noch bei $x = m$ häufen; also $-(p\,z')' + q\,z = \lambda\,k\,z$ und $z \not\equiv 0$ in $l < x \leqq a$, $b \leqq x < m$. Für u aus $\dot{\mathfrak{W}}$ wird $(u, A\,u) = \int\limits_l^m (p\,|u'|^2 + q\,|u|^2)\,d\,x$. Setzt man in $l < x \leqq a$ und $b \leqq x < m$ für q den Ausdruck $q = (p\,f)' + p\,f^2 + \lambda\,k$, $f = \frac{z'}{z}$, so entsteht

$$(u, A\,u) = \int\limits_l^a (p\,|u' - f\,u|^2 + \lambda\,k\,|u|^2)\,d\,x + p(a)\,f(a)\,|u(a)|^2 - p(b)\,f(b)\,|u(b)|^2$$
$$+ \int\limits_b^m (p\,|u' - f\,u|^2 + \lambda\,k\,|u|^2)\,d\,x + \int\limits_a^b (p\,|u'|^2 + q\,|u|^2)\,d\,x\,.$$

Wählt man eine Konstante c so, daß $p\,f\,|u|^2\Big|_b^a + \int\limits_a^b (p\,|u'|^2 + q\,|u|^2)\,d\,x \geqq c \int\limits_a^b k\,|u|^2\,d\,x$ wird für alle u, und setzt man $\alpha = \mathrm{Min}(\lambda, c)$, so wird $(u, A\,u) \geqq \alpha(u, u)$, also A halbbeschränkt.

Die Sätze 2a und 2b sind dazu geeignet, in einzelnen Fällen zu entscheiden, ob Halbbeschränktheit vorliegt oder nicht, weil man dazu nur das Verhalten der Lösungen in der Umgebung von $x = l$ zu kennen braucht. Der folgende Hilfssatz soll dafür ein Beispiel sein.

Hilfssatz 2. *Wenn $x = l$ eine Stelle der Bestimmtheit von $-(p z')' + q z = \lambda k z$ für jedes λ ist, dann ist A am linken Ende $x = l$ dann und nur dann halbbeschränkt, wenn für ein reelles λ die „charakteristische Gleichung" für die Exponenten des Potenzreihensatzes nur reelle Wurzeln hat.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $l = 0$. Wenn die charakteristischen Exponenten für ein reelles λ reell sind, dann gibt es eine Lösung von $-(p z')' + q z = \lambda k z$, welche in der Umgebung von $x = 0$ die Gestalt $z = x^\varrho (1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)$ mit reellem ϱ hat. Diese Lösung hat in $0 < x < \xi$ sicher keine Nullstelle, wenn nur ξ klein genug gewählt wird. Also ist nach Satz 2a der Operator A am linken Ende halbbeschränkt. Wenn aber für jedes λ nicht reelle charakteristische Exponenten ϱ_1, ϱ_2 auftreten, dann muß $\varrho_1 = \bar{\varrho}_2 = \varrho = \alpha + i\beta$ sein. Es gibt für jedes λ zwei Lösungen $z = x^\varrho (1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)$ und $\bar{z} = x^{\bar{\varrho}} (1 + \bar{c}_1 x + \bar{c}_2 x^2 + \cdots)$, also auch eine reelle Lösung $y = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = x^\alpha [\cos(\beta \log x) + w(x)]$, wobei $|w(x)| < \frac{1}{2}$ in $0 < x < \xi$, wenn ξ genügend klein gewählt wird. Da $\beta \neq 0$ vorausgesetzt war, hat y unendlich viele Nullstellen in $0 < x < \xi$ und auch in jedem Intervall $0 < x < \xi'$ mit $\xi' < \xi$. Also ist nach Satz 2b der Operator A bei $x = 0$ nicht halbbeschränkt.

Wenn die Differentialgleichung (1) in der Umgebung eines Endes, etwa des linken Endes $x = l$, eine nullstellenfreie reelle Lösung hat, dann kann man ein Fundamentalsystem angeben, das in bezug auf $x = l$ in gewisser Weise ausgezeichnet ist. Das lehrt

Satz 3. *Die Differentialgleichung $-(p z')' + q z = \mu k z$ besitze eine reelle Lösung $z(x)$, die in $l < x \leq s$ nicht verschwindet. Dann gibt es ein reelles Fundamentalsystem $\psi(x)$, $\omega(x)$ mit den Eigenschaften:*

1. $\psi(x) \neq 0$, $\omega(x) \neq 0$ *in* $l < x \leq s$.
2. $\dfrac{\omega(x)}{\psi(x)} \to 0$, *wenn* $x \to l$, $l < x$.

Die Funktion $\omega(x)$ ist dabei bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Für jedes reelle Fundamentalsystem der Differentialgleichung, das 1 und 2 erfüllt, gilt außerdem

3. $\int_l^s \psi^{-2} p^{-1} \, dx < \infty, \quad \int_l^s \omega^{-2} p^{-1} \, dx = \infty$

und, wenn bei $x = l$ der Grenzkreisfall vorliegt, d. h. $\int_l^r |u|^2 k \, dx < \infty$ ist für alle Lösungen $u(x)$ der Differentialgleichung (r beliebig, nur $l < r < m$), darüber hinaus

4. $\int_l^x \omega^2(\xi) k(\xi) \, d\xi \Big/ \int_l^x \psi^2(\xi) k(\xi) \, d\xi = O\left(\left(\frac{\omega(x)}{\psi(x)}\right)^2\right)$ *für* $x \to l$, $x > l$.

Beweis. I. Wenn $\int_l^s z^{-2} p^{-1} \, dx < \infty$, dann setze man $\psi(x) = z(x)$, $\omega(x) = z(x) \int_l^x z^{-2}(\xi) p^{-1}(\xi) \, d\xi$. Es wird $p(\psi \omega' - \psi' \omega) = 1$ und

$-(p\,\omega')' + q\,\omega = \mu\,k\,\omega$, also ist $\psi(x)$, $\omega(x)$ ein Fundamentalsystem. Offenbar verschwinden weder $\psi(x)$ noch $\omega(x)$ in $l < x \leqq s$, und es ist $\frac{\omega(x)}{\psi(x)} = \int_l^x z^{-2}(\xi)\,p^{-1}(\xi)\,d\,\xi \to 0$, wenn $x \to l$. Die beiden Behauptungen 1 und 2 sind nachgewiesen.

Wenn $\int_l^s z^{-2}\,p^{-1}\,d\,x = \infty$, dann setze man $\psi(x) = z(x)\left(1 + \int_x^s z^{-2}(\xi)\,p^{-1}(\xi)\,d\,\xi\right)$ und $\omega(x) = z(x)$. Es wird $p(\psi\,\omega' - \psi'\,\omega) = 1$, $\psi(x)$, $\omega(x)$ ist ein Fundamentalsystem, $\psi \neq 0$, $\omega \neq 0$ in $l < x \leqq s$ und $\frac{\omega(x)}{\psi(x)} = \left(1 + \int_x^s z^{-2}(\xi)\,p^{-1}(\xi)\,d\,\xi\right)^{-1} \to 0$, wenn $x \to l$. Also auch in diesem Fall sind die Behauptungen 1 und 2 erwiesen.

II. Sei $\tilde{\psi} = a\,\psi + b\,\omega$, $\tilde{\omega} = c\,\psi + d\,\omega$ ein anderes Fundamentalsystem, das 1 und 2 erfüllt. Dann muß $a\,d - b\,c \neq 0$ sein. Für x genügend nahe an l wäre $\tilde{\psi}(x) \neq 0$, $\psi(x) \neq 0$ und $\frac{\tilde{\omega}(x)}{\tilde{\psi}(x)} = \frac{c + d\,\frac{\omega}{\psi}}{a + b\,\frac{\omega}{\psi}} \to 0$ für $x \to l$. Weil a und b nicht beide verschwinden und $\frac{\omega}{\psi} \to 0$ geht, folgt $c = 0$, also $\tilde{\omega} = d\,\omega$, wie behauptet.

III. Wenn $\int_l^s z^{-2}\,p^{-1}\,d\,x < \infty$, dann ist $\int_l^s \psi^{-2}\,p^{-1}\,d\,x < \infty$. Mit $l < l' < s$ wird

$$\int_{l'}^s \omega^{-2}\,p^{-1}\,d\,x = \int_{l'}^s z^{-2}(x)\left(\int_l^x z^{-2}(\xi)\,p^{-1}(\xi)\,d\,\xi\right)^{-2} p^{-1}(x)\,d\,x =$$

$$= \int_{l'}^s -\frac{d}{d\,x}\left[\left(\int_l^x z^{-2}(\xi)\,p^{-1}(\xi)\,d\,\xi\right)^{-1}\right] d\,x = -\left(\int_l^s z^{-2}\,p^{-1}\,d\,x\right)^{-1} +$$

$$+ \left(\int_l^{l'} z^{-2}\,p^{-1}\,d\,x\right)^{-1} \to \infty, \text{ wenn } l' \to l, \text{ also } \int_l^s \omega^{-2}\,p^{-1}\,d\,x = \infty\,.$$

Wenn $\int_l^s z^{-2}\,p^{-1}\,d\,x = \infty$, dann $\int_l^s \omega^{-2}\,p^{-1}\,d\,x = \infty$. Ferner

$$\int_{l'}^s \psi^{-2}\,p^{-1}\,d\,x = \int_{l'}^s z^{-2}(x)\left(1 + \int_x^s z^{-2}(\xi)\,p^{-1}(\xi)\,d\,\xi\right)^{-2} p^{-1}(x)\,d\,x =$$

$$= \int_{l'}^s \frac{d}{d\,x}\left[\left(1 + \int_x^s z^{-2}(\xi)\,p^{-1}(\xi)\,d\,\xi\right)^{-1}\right] d\,x = 1 - \left(1 + \int_{l'}^s z^{-2}\,p^{-1}\,d\,x\right)^{-1} \leqq 1,$$

also $\int_l^s \psi^{-2}\,p^{-1}\,d\,x < \infty$. Damit ist die Behauptung 3 zunächst für das spezielle Fundamentalsystem $\psi(x)$, $\omega(x)$ bewiesen. Wenn aber $\tilde{\psi}$, $\tilde{\omega}$ ein anderes Fundamentalsystem ist, das 1 und 2 erfüllt, dann ist $\tilde{\omega} = d\,\omega$, also auch $\int_l^s \tilde{\omega}^{-2}\,p^{-1}\,d\,x = \infty$ und $\tilde{\psi} = a\,\psi + b\,\omega$, $a \neq 0$, $\tilde{\psi} = a\,\psi\left(1 + \frac{b}{a}\,\frac{\omega}{\psi}\right)$, woraus wegen $\frac{\omega(x)}{\psi(x)} \to 0$, $x \to l$ auch $\int_l^s \tilde{\psi}^{-2}\,p^{-1}\,d\,x < \infty$ folgt. Damit ist die Behauptung 3 bewiesen.

IV. Wenn $\int_l^s z^{-2}\,p^{-1}\,d\,x < \infty$, dann

$$\left|\frac{\psi(x)}{\omega(x)}\right| \left(\int_l^x \omega^2(t)\, k(t)\, d\,t\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int_l^x z^{-2}(t)\, p^{-1}(t)\, d\,t\right)^{-1} \cdot \left(\int_l^x z^2(t) \left(\int_l^t z^{-2}(\xi)\, p^{-1}(\xi)\, d\,\xi\right)^2 k(t)\, d\,t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \left(\int_l^x z^2(t)\, k(t)\, d\,t\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_l^x \psi^2(t)\, k(t)\, d\,t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wenn $\int_l^s z^{-2}\, p^{-1}\, d\,x = \infty$, dann

$$\left|\frac{\psi(x)}{\omega(x)}\right| \left(\int_l^x \omega^2(t)\, k(t)\, d\,t\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(1 + \int_x^s z^{-2}(t)\, p^{-1}(t)\, d\,t\right) \left(\int_l^x z^2(t)\, k(t)\, d\,t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq \left[\int_l^x z^2(t)\, k(t) \left(1 + \int_t^s z^{-2}(\xi)\, p^{-1}(\xi)\, d\,\xi\right)^2 d\,t\right]^{\frac{1}{2}} = \left|\int_l^x \psi^2(t)\, k(t)\, d\,t\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Damit ist die Behauptung 4 zunächst für das Fundamentalsystem $\psi(x)$, $\omega(x)$ nachgewiesen. Hat man ein anderes (1 und 2 erfüllendes) Fundamentalsystem $\tilde{\psi}(x) = a\,\psi(x) + b\,\omega(x)$, $\tilde{\omega}(x) = d\,\omega(x)$, $a \neq 0$, dann wird

$$\left|\frac{\tilde{\psi}(x)}{\tilde{\omega}(x)}\right| \left(\int_l^x \tilde{\omega}^2(t)\, k(t)\, d\,t\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(|a| \left|\frac{\psi(x)}{\omega(x)}\right| + |b|\right) \left(\int_l^x \omega^2(t)\, k(t)\, d\,t\right)^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$\leqq (1 + |b|) \left(\int_l^x \omega^2(t)\, k(t)\, d\,t\right)^{\frac{1}{2}}$ für alle x hinreichend nahe an l. Für solche x ist aber auch

$$\frac{1}{2}\left|\tilde{\psi}(x)\right| > \left|\tilde{\omega}(x)\right| = |d| \cdot |\omega(x)|,$$

also $\left(\int_l^x \omega^2(t)\, k(t)\, d\,t\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{1}{2|d|} \left(\int_l^x \tilde{\psi}^2\, k(t)\, d\,t\right)^{\frac{1}{2}}$,

so daß sich

$$\left|\frac{\tilde{\psi}(x)}{\tilde{\omega}(x)}\right| \left(\int_l^x \tilde{\omega}^2(t)\, k(t)\, d\,t\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{1}{2|d|}(1 + |b|) \left(\int_l^x \tilde{\psi}^2\, k(t)\, d\,t\right)^{\frac{1}{2}}$$

ergibt, und das ist Behauptung 4. Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Wir machen noch zwei einfache Bemerkungen.

1. Wenn am linken Ende der Grenzkreisfall gegeben ist, dann ist die Differentialgleichung $-(p z')' + q z = \lambda k z$ entweder für jedes reelle λ oszillatorisch am linken Ende oder für keines. Denn sei sie nicht oszillatorisch für λ_0, dann wähle man nach Satz 3 das Fundamentalsystem $\psi(x)$, $\omega(x)$ von $-(p z')' + q z = \lambda_0 k z$ mit $p(\omega'\psi - \omega\psi') = \Delta$. Dann wird die Lösung u der Integralgleichung

$$u(x) = \psi(x) + \psi(x) \int_l^x \frac{\omega(\xi)(\lambda - \lambda_0)\, u(\xi)}{\Delta} k(\xi)\, d\,\xi - \omega(x) \int_l^x \frac{\psi(\xi)(\lambda - \lambda_0)\, u(\xi)}{\Delta} k(\xi)\, d\,\xi$$

Lösung von $-(p u')' + q u = \lambda k u$, und wegen $\frac{\omega}{\psi} \to 0$, $x \to l$ verschwindet u nicht in einem Intervall $l < x \leqq t$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

2. Wenn A am linken Ende halbbeschränkt ist und $\int_l^s \sqrt{\frac{k}{p}}\, d\,x = \infty$ $(l < s < m)$ ausfällt, dann liegt bei $x = l$ der Grenzpunktfall vor. In der Tat gibt es nach

Satz 2b ein λ und eine reelle Lösung $z(x)$ von $-(pz')' + qz = \lambda k z$, die in $l < x \leq s$ nicht verschwindet. Nach Satz 3 gibt es daher auch eine Lösung $\psi(x)$ mit $\int\limits_l^s \psi^{-2} p^{-1} dx < \infty$. Läge bei $x = l$ der Grenzkreisfall vor, dann wäre auch $\int\limits_l^s \psi^2 k\, dx < \infty$. Nun ist $\psi^{-2} p^{-1} + \psi^2 k \geqq 2 p^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}}$, also wäre $2 \int\limits_l^s p^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} dx < \infty$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Diese Verallgemeinerung eines WEYLschen Satzes ist für $p = k = 1$ enthalten in einem Theorem von PH. HARTMAN; vgl Anm. [8]).

§ 3. Die ausgezeichnete Randbedingung.

Sobald ein Fundamentalsystem $\psi(x)$, $\omega(x)$ mit den Eigenschaften 1—2 von Satz 3 zur Verfügung steht — und das ist nach Satz 2b und Satz 3 der Fall, wenn A am linken Ende halbbeschränkt ist —, dann kann die Randbedingung (6), die wir im Grenzkreisfall bei $x = l$ fordern mußten, übersichtlicher formuliert werden. Wir wählen nämlich gemäß Satz 3 eine reelle Zahl μ und ein reelles Fundamentalsystem $\psi(x)$, $\omega(x)$ von $-(pz')' + qz = \mu k z$, auf das die vier Aussagen des Satzes 3 zutreffen. In bezug auf diese festgehaltenen μ, $\psi(x)$, $\omega(x)$ definieren wir zu jedem $u(x)$ aus $\mathfrak{W}_l$ (zur Definition von $\mathfrak{W}_l$ vgl. S. 345) zwei „Anfangszahlen" u_0 und u_1 wie folgt. Für jede solche Funktion $u(x)$ ist $\frac{1}{k}\left\{-(pu')' + qu\right\} - \mu u = j$ eine in der Umgebung von $x = l$ stückweise stetige Funktion mit $\int\limits_l^r |j|^2 k\, dx < \infty$ mit geeignetem r aus $l < r < m$ und daher

$$u(x) = u_0 \psi(x) + u_1 \omega(x) + \psi(x) \int\limits_l^x \frac{\omega(\xi) j(\xi)}{\Delta} k(\xi)\, d\xi - \omega(x) \int\limits_l^x \frac{\psi(\xi) j(\xi)}{\Delta} k(\xi)\, d\xi$$

mit $\Delta = p(\xi)(\omega'(\xi)\psi(\xi) - \psi'(\xi)\omega(\xi))$. Bei gegebenen μ, $\psi(x)$, $\omega(x)$ sind u_0, u_1, $j(x)$ eindeutig bestimmt; wir nennen u_0 und u_1 die Anfangszahlen von $u(x)$ am linken Ende $x = l$ (zu ergänzen: in bezug auf μ, ψ, ω). Die in der Randbedingung (6) verwendete Funktion $\alpha(x)$ gehört zu $\mathfrak{W}_l$ und genügt der Gleichung $\frac{1}{k}\left\{-(p\alpha')' + q\alpha\right\} - \mu\alpha = (i - \mu)\alpha$, also wird

$$\alpha(x) = \alpha_0 \psi(x) + \alpha_1 \omega(x) + \psi(x) \int\limits_l^x \frac{\omega(\xi)(i-\mu)\alpha(\xi)}{\Delta} k(\xi)\, d\xi -$$
$$- \omega(x) \int\limits_l^x \frac{\psi(\xi)(i-\mu)\alpha(\xi)}{\Delta} k(\xi)\, d\xi.$$

Unter Berücksichtigung von $[\psi, \psi]_x \equiv 0$, $[\omega, \omega]_x \equiv 0$, $[\psi, \omega]_x \equiv -[\omega, \psi]_x$ folgt $[\alpha, u]_l = (\bar{\alpha}_0 u_1 - \bar{\alpha}_1 u_0)[\psi, \omega]_l$. Wegen $[\alpha, \alpha]_l = 0$, $\alpha \not\equiv 0$ ist $\bar{\alpha}_0 \alpha_1 - \bar{\alpha}_1 \alpha_0 = 0$, aber nicht $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, also $\alpha_0 : \alpha_1$ reell. Wir können setzen $\alpha_0 : \alpha_1 = -\sin\vartheta : \cos\vartheta$, $0 \leqq \vartheta < \pi$ und (6) geht über in

$$\cos\vartheta\, u_0 + \sin\vartheta\, u_1 = 0 \qquad 0 \leqq \vartheta < \pi. \tag{9}$$

Entsprechend könnte am rechten Ende $x = m$ verfahren werden

Die Randbedingung (9) hängt im allgemeinen von der speziellen Wahl von μ, ψ, ω ab, weil sowohl u_0, u_1 als auch das Verhältnis $u_0 : u_1$ davon abhängen. Nur für $\vartheta = 0$ ist das nicht der Fall. In der Tat heißt dann die Randbedingung einfach $\lim\limits_{\substack{x\to l\\ x>l}} \frac{u(x)}{\psi(x)} = 0$. Wählt man nun $\tilde{\mu}, \tilde{\psi}(x), \tilde{\omega}(x)$ anders, aber so, daß die Eigenschaften 1—2 von Satz 3 erfüllt sind, dann wird

$$-(p\,\tilde{\omega}')' + q\,\tilde{\omega} - \mu\,k\,\tilde{\omega} = (\tilde{\mu} - \mu)\,k\,\tilde{\omega} \quad \text{und}$$

$$-(p\,\tilde{\psi}')' + q\,\tilde{\psi} - \mu\,k\,\tilde{\psi} = (\tilde{\mu} - \mu)\,k\,\tilde{\psi}, \quad \text{also}$$

$$\tilde{\omega}(x) = \alpha\,\psi(x) + \beta\,\omega(x) + \psi(x)\int\limits_l^x \frac{\omega(\xi)(\tilde{\mu}-\mu)\tilde{\omega}(\xi)}{\Delta}\,k(\xi)\,d\xi - {}$$

$$- \omega(x)\int\limits_l^x \frac{\psi(\xi)(\tilde{\mu}-\mu)\tilde{\omega}(\xi)}{\Delta}\,k(\xi)\,d\xi$$

und

$$\tilde{\psi}(x) = \gamma\,\psi(x) + \delta\,\omega(x) + \psi(x)\int\limits_l^x \frac{\omega(\xi)(\tilde{\mu}-\mu)\tilde{\psi}(\xi)}{\Delta}\,k(\xi)\,d\xi - {}$$

$$- \omega(x)\int\limits_l^x \frac{\psi(\xi)(\tilde{\mu}-\mu)\tilde{\psi}(\xi)}{\Delta}\,k(\xi)\,d\xi.$$

Es ist $\alpha\,\delta - \gamma\,\beta \neq 0$. Außerdem $\gamma \neq 0$. Denn wäre $\gamma = 0$, dann würde wegen $\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\psi}} = \frac{\alpha + \beta\frac{\omega}{\psi} + \cdots}{0 + \delta\frac{\omega}{\psi} + \cdots}$ und $\lim\limits_{x\to l}\frac{\omega}{\psi} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\psi}} = 0$ auch $\alpha = 0$ folgen, was $\alpha\,\delta - \gamma\,\beta = 0$ zur Folge hätte. Es ist nun $\frac{u}{\tilde{\psi}} = \frac{\frac{u}{\psi}}{\gamma + \delta\frac{\omega}{\psi} + \cdots}$, also $\lim\limits_{x\to l}\frac{u(x)}{\tilde{\psi}(x)} = \frac{1}{\gamma}\lim\limits_{x\to l}\frac{u(x)}{\psi(x)}$. Also, wie behauptet, $\lim\limits_{x\to l}\frac{u(x)}{\psi(x)} = 0$ äquivalent mit $\lim\limits_{x\to l}\frac{u(x)}{\tilde{\psi}(x)} = 0$.

Wir können zusammenfassen: Wenn A am linken Ende $x = l$ halbbeschränkt ist, dann wähle man irgendein μ, zu welchem die Differentialgleichung $-(p\,z')' + q\,z = \lambda\,k\,z$ ein reelles Fundamentalsystem $\psi(x), \omega(x)$ besitzt, das in $l < x \leqq s$ (mit irgendeinem s aus $l < x < m$) nicht verschwindet und für das $\lim\limits_{x\to l}\frac{\omega(x)}{\psi(x)} = 0$ ist. Nach Satz 3 gibt es ein solches μ immer. Dann heißt die ausgezeichnete Randbedingung $\lim\limits_{x\to l}\frac{u(x)}{\psi(x)} = 0$. Sie ist unabhängig von der Willkür, die in der Wahl von $\mu, \psi(x), \omega(x)$ steckt.

§ 4. Halbbeschränktheit und Randbedingung.

Die Halbbeschränktheit von A in irgendeinem der durch Randbedingungen festgelegten Teilräume $\mathfrak{A}$ (vgl. § 1) ist bereits gesichert, wenn $\mathfrak{A}$ in $\dot{\mathfrak{W}}$ halbbeschränkt ist. Das ist der Inhalt von

Satz 4. *Wenn A in $\dot{\mathfrak{W}}$ halbbeschränkt, dann auch A in $\mathfrak{A}$.*

Das beweisen wir zunächst unter der Voraussetzung, daß bei $x = l$ und bei $x = m$ der Grenzkreisfall vorliegt. Der Raum $\mathfrak{A}$ besteht dann aus allen $u(x)$ von $\mathfrak{W}$, deren Anfangszahlen in $x = l$ (in bezug auf μ, ψ, ω) einer festen Relation

$$u_0 \cos\vartheta + u_1 \sin\vartheta = 0 \qquad 0 \leqq \vartheta < \pi$$

und deren Anfangszahlen in $x = m$ einer entsprechenden Relation genügen In der Umgebung von $x = l$ läßt sich jedes $u(x)$ von $\mathfrak{A}$ in der Form

$$(10) \qquad u(x) = c(\sin\vartheta\,\psi(x) - \cos\vartheta\,\omega(x)) + \psi(x)\int_l^x \omega(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)\,d\xi -$$
$$- \omega(x)\int_l^x \psi(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)\,d\xi$$

schreiben, wobei $\psi(x)$, $\omega(x)$ die Eigenschaften 1—4 von Satz 3 besitzen, zu denen wir hier noch $p(\omega'\psi - \psi'\omega) = 1$ hinzuverlangen. Wegen $\omega(x)/\psi(x) \to 0$ für $x \to l$ gibt es zu jedem ϑ ein a, so daß $\sin\vartheta\,\psi(x) - \cos\vartheta\,\omega(x) \neq 0$ in $l < x \leqq a$. Also ist $f(x) = \dfrac{\sin\vartheta\,\psi'(x) - \cos\vartheta\,\omega'(x)}{\sin\vartheta\,\psi(x) - \cos\vartheta\,\omega(x)}$ in $l < x \leqq a$ stetig und $f'(x)$ stückweise stetig, und es ist $q = (pf)' + pf^2 + \mu k$, also $\int_x^a \bar{u}(\xi)\{-(p(\xi)\,u'(\xi))' + q(\xi)\,u(\xi)\}\,d\xi = \bar{u}(x)\,p(x)\,u'(x) -$

$$- \bar{u}(a)\,p(a)\,u'(a) + \int_x^a (p(\xi)\,|u'(\xi)|^2 + q(\xi)\,|u(\xi)|^2)\,d\xi = u(x)\,p(x)\,u'(x) -$$
$$- p(x)\,|u(x)|^2 f(x) - \bar{u}(a)\,p(a)\,u'(a) + p(a)\,|u(a)|^2 f(a) + \int_x^a p(\xi)\,|u'(\xi) -$$
$$- f(\xi)\,u(\xi)|^2\,d\xi + \mu\int_x^a |u(\xi)|^2\,k(\xi)\,d\xi\,.$$

Wegen (10) ist aber

$$\bar{u}(x)\,p(x)\,(u'(x) - f(x)\,u(x)) = \bar{c}\cos\vartheta\int_l^x \omega(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)\,d\xi -$$
$$- \bar{c}\sin\vartheta\int_l^x \psi(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)\,d\xi +$$
$$+ \frac{\cos\vartheta\,\psi(x)}{\sin\vartheta\,\psi(x) - \cos\vartheta\,\omega(x)}\int_l^x \overline{\omega(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)}\,d\xi \cdot \int_l^x \omega(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)\,d\xi -$$
$$- \frac{\sin\vartheta\,\psi(x)}{\sin\vartheta\,\psi(x) - \cos\vartheta\,\omega(x)}\int_l^x \overline{\omega(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)}\,d\xi \cdot \int_l^x \psi(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)\,d\xi -$$
$$- \frac{\cos\vartheta\,\omega(x)}{\sin\vartheta\,\psi(x) - \cos\vartheta\,\omega(x)}\int_l^x \overline{\psi(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)}\,d\xi \cdot \int_l^x \omega(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)\,d\xi +$$
$$+ \frac{\sin\vartheta\,\omega(x)}{\sin\vartheta\,\psi(x) - \cos\vartheta\,\omega(x)}\int_l^x \overline{\psi(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)}\,d\xi \cdot \int_l^x \psi(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)\,d\xi\,.$$

Wenn $\vartheta \neq 0$, dann streben mit $x \to l$ die vier letzten Ausdrücke der rechten Seite gegen Null, weil $\omega(x)/\psi(x)$ gegen Null strebt. Wenn $\vartheta = 0$, dann wird aus dem dritten Glied der rechten Seite $-\dfrac{\psi(x)}{\omega(x)}\left|\int_0^x \omega(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)\,d\xi\right|^2$, und dieses strebt gegen Null wegen Behauptung 4 von Satz 3; die übrigen Glieder streben offensichtlich gegen Null. Für jedes ϑ gilt also $\lim\limits_{x \to l} \bar{u}(x)\,p(x)\,(u'(x) - f(x)\,u(x)) = 0$, also

$$
(11)\quad \begin{aligned}
&\int_l^a \bar{u}(x)\left\{-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x)\right\} dx = -\bar{u}(a)\,p(a)\,(u'(a) - f(a)\,u(a)) + \\
&\quad + \int_l^a p(x)\,|u'(x) - f(x)\,u(x)|^2\, dx + \mu \int_l^a |u(x)|^2\, k(x)\, dx .
\end{aligned}
$$

Entsprechend behandeln wir das rechte Intervallende $x = m$ und gelangen für u aus $\mathfrak{A}$ zu einer Gleichung

$$
(11a)\quad \begin{aligned}
&\int_b^m \bar{u}(x)\left\{-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x)\right\} dx = \bar{u}(b)\,p(b)\,(u'(b) - g(b)\,u(b)) + \\
&\quad + \int_b^m p(x)\,|u'(x) - g(x)\,u(x)|^2\, dx + \nu \int_b^m |u(x)|^2\, k(x)\, dx .
\end{aligned}
$$

Addieren wir beide Gleichungen und fügen

$$
\int_a^b \bar{u}(x)\{-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x)\}\,dx = \bar{u}(x)p(x)u'(x)\Big|_b^a + \int_a^b (p(x)\,|u'(x)|^2 + q(x)\,|u(x)|^2)\,dx
$$

hinzu, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
(u, A\,u) = &\int_a^b (p(x)\,|u'(x)|^2 + q(x)\,|u(x)|^2)\,dx + p(a)\,|u(a)|^2 f(a) - p(b)\,|u(b)|^2 g(b) + \\
&+ \int_l^a p(x)\,|u'(x) - f(x)\,u(x)|^2\,dx + \int_b^m p(x)\,|u'(x) - g(x)\,u(x)|^2\,dx + \\
&+ \mu \int_l^a |u(x)|^2\, k(x)\,dx + \nu \int_b^m |u(x)|^2\, k(x)\,dx .
\end{aligned}
$$

Für das endliche Intervall $a \leqq x \leqq b$ gibt es natürlich ein γ, so daß

$$
\int_a^b (p(x)\,|u'(x)|^2 + q(x)\,|u(x)|^2)\,dx + p(a)\,|u(a)|^2 f(a) - p(b)\,|u(b)|^2 g(b) \geqq \gamma \int_a^b |u(x)|^2 k(x)\,dx
$$

wird. Also $(u, A\,u) \geqq \gamma \int_a^b |u|^2 k\,dx + \mu \int_l^a |u|^2 k\,dx + \nu \int_b^m |u|^2 k\,dx \geqq C \int_l^m |u|^2 k\,dx$ mit geeignetem C für alle u aus $\mathfrak{A}$, d. h. es ist A in $\mathfrak{A}$ halbbeschränkt.

Wir haben noch die Halbbeschränktheit von A in $\mathfrak{A}$ zu zeigen, wenn an einem oder beiden Intervallenden der Grenzpunktfall vorliegt. In diesem Falle verstehen wir unter $\dot{\mathfrak{A}}$ alle $u(x)$ aus $\mathfrak{A}$, die in der Umgebung[7]) des Intervallendes, an dem der Grenzpunktfall gegeben ist, identisch verschwinden. (Wenn an beiden Enden der Grenzpunktfall vorliegt, dann ist $\dot{\mathfrak{A}} = \dot{\mathfrak{B}}$.) Wie wir im Satz 1 gesehen haben, ist auch A in $\dot{\mathfrak{A}}$ wesentlich selbstadjungiert, insbesondere gibt es zu jedem u aus $\mathfrak{A}$ eine Folge u_n aus $\dot{\mathfrak{A}}$, so daß $u_n \to u, A\,u_n \to A\,u$ gilt. Also, wenn $u \neq 0$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(u_n, A\,u_n)}{(u_n, u_n)} = \frac{(u, A\,u)}{(u, u)}$. Um die Halbbeschränktheit von A in $\mathfrak{A}$ zu zeigen, braucht man sie daher nur für A in $\dot{\mathfrak{A}}$ zu beweisen. Wenn an beiden Enden der Grenzpunktfall gegeben ist, dann ist nichts mehr zu beweisen, weil die Halbbeschränktheit in $\dot{\mathfrak{B}} = \dot{\mathfrak{A}}$ ja vorausgesetzt ist.

Bleibt der Fall, daß an einem Ende, wir dürfen annehmen bei $x = l$, der Grenzkreisfall vorliegt, bei $x = m$ aber der Grenzpunktfall, so daß alle $u(x)$ von $\dot{\mathfrak{A}}$ in der Umgebung von $x = m$ identisch verschwinden. Wir wählen wieder $f(x) = \frac{\sin\vartheta\,\psi'(x) - \cos\vartheta\,\omega'(x)}{\sin\vartheta\,\psi(x) - \cos\vartheta\,\omega(x)}$, wobei wir gemäß Satz 2c den zur Lösung $z(x) = \sin\vartheta\,\psi(x) - \cos\vartheta\,\omega(x)$ von $-(p\,z')' + q\,z = \mu\,k\,z$ gehörigen Parameter μ so wählen, daß man a, b angeben kann mit $z(x) \neq 0$ in

$l < x \leqq a$ und $b \leqq x < m$. Aus $(u, A\,u) = \int_l^a \bar{u}\,(-(p\,u')' + q\,u)\,d\,x + \int_a^b \bar{u}\,(-(p\,u')' + q\,u)\,d\,x + \int_b^m \bar{u}\,(-(p\,u')' + q\,u)\,d\,x$ folgt nach (11) und, weil $u\,(x)$ in der Umgebung von $x = m$ identisch verschwindet,

$$(u, A\,u) = p\,(a)\,f\,(a)\,|u\,(a)|^2 + \int_l^a p\,|u' - f\,u|^2\,d\,x + \mu \int_l^a |u|^2\,k\,d\,x + \\ + \int_a^b (p\,|u'|^2 + q\,|u|^2)\,d\,x + \int_b^m (p\,|u'|^2 + q\,|u|^2)\,d\,x.$$

In dem letzten Integral führen wir $q = (p\,f)' + p\,f^2 + \mu\,k$ ein und erhalten

$$(12)\qquad (u, A\,u) = \int_l^a p\,|u' - f\,u|^2\,d\,x + \mu \int_l^a |u|^2\,k\,d\,x + \mu \int_b^m |u|^2\,k\,d\,x + \\ + \int_b^m p\,|u' - f\,u|^2\,d\,x + p(a)\,f(a)\,|u\,(a)|^2 - p(b)\,f(b)\,|u\,(b)|^2 + \int_a^b (p\,|u'|^2 + q\,|u|^2)\,d\,x.$$

Daraus folgt $(u, A\,u) \geqq c \int_l^m |u|^2\,d\,x$, also A halbbeschränkt in $\mathring{\mathfrak{A}}$. Damit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

Da jedes $\mathfrak{A}$ den Teilraum $\mathring{\mathfrak{B}}$ enthält, kann aus Satz 4 die Alternative gefolgert werden: entweder ist jeder der Operatoren A in $\mathfrak{A}$ halbbeschränkt oder keiner. Diese Alternative folgt auch für den Spezialfall $0 \leqq x < \infty$ mit regulärem linken Ende nicht aus dem Weylschen Satz über die Unabhängigkeit des Häufungsspektrums von der Randbedingung.

§ 5. Die Friedrichssche Charakterisierung der ausgezeichneten Randbedingung.

Wenn an einem Ende, etwa bei $x = l$, der Grenzkreisfall vorliegt, dann waren die bei $x = l$ zu stellenden Randbedingungen von der Form: jedes zugelassene $u\,(x)$ hat die Form

$$u\,(x) = u_0\,\psi\,(x) + u_1\,\omega\,(x) + \psi\,(x) \int_l^x \omega\,(\xi)\,j\,(\xi)\,k\,(\xi)\,d\,\xi - \omega\,(x) \int_l^x \psi\,(\xi)\,j\,(\xi)\,k\,(\xi)\,d\,\xi$$

und zwischen u_0 und u_1 besteht mit vorgegebenem ϑ eine Beziehung $u_0 \cos\vartheta + u_1 \sin\vartheta = 0$, $0 \leqq \vartheta < \pi$. Wir wollen zunächst zeigen, daß auch in unserem allgemeinen Fall (wo wir über die Koeffizienten der Differentialgleichung nur die Voraussetzungen (2) machen) die von Friedrichs gegebene Charakterisierung möglich ist.

Dazu folgende Vorbemerkung. Wie Satz 1 lehrt, bleibt ein Operator A in $\mathfrak{A}$, wie er in § 1 erklärt wurde, wesentlich selbstadjungiert, wenn man ihn nur in einem Teilraum $\mathring{\mathfrak{A}}$ betrachtet, der aus allen $u\,(x)$ von $\mathfrak{A}$ besteht, die an einem Intervallende identisch verschwinden, sofern an diesem Ende der Grenzpunktfall herrscht. Wenn der Grenzkreisfall vorliegt, dann ist A in diesem Teilraum nicht mehr wesentlich selbstadjungiert. Er ist jedoch dort hinreichend selbstadjungiert (§ 6 Definition 3), wenn A halbbeschränkt ist, und eine zugehörige wesentlich selbstadjungierte Fortsetzung ist einer der Operatoren A in $\mathfrak{A}$, die in § 1 aufgezählt sind.

Wir beweisen nämlich

Satz 5. *Es liege bei $x = l$ der Grenzkreisfall mit der Randbedingung $u_0 \cos\vartheta + u_1 \sin\vartheta = 0$, $0 \leqq \vartheta < \pi$ vor und bei $x = m$ entweder der Grenzpunktfall oder der Grenzkreisfall mit einer bestimmten festen Randbedingung.*

Den durch diese Bedingungen eingeschränkten Teilraum von $\mathfrak{W}$ nennen wir $\mathfrak{A}_\vartheta$. Mit $\mathfrak{T}$ werde der (von ϑ unabhängige) Teilraum von $\mathfrak{A}_\vartheta$ bezeichnet, der alle $u(x)$ umfaßt, die in der (rechtsseitigen) Umgebung von $x = l$ identisch verschwinden. Es sei A halbbeschränkt. Behauptung: Es ist A in $\mathfrak{T}$ hinreichend selbstadjungiert (§ 6, Definition 3) und A in $\mathfrak{A}_0$ ist eine zugehörige wesentlich selbstadjungierte Fortsetzung.

Beweis. I. Sei u Element von $\mathfrak{A}_0$. Wir müssen eine Folge u_n aus $\mathfrak{T}$ angeben, für die $(u_n - u, u_n - u) \to 0$, $n \to \infty$ und $(u_n - u_m, A(u_n - u_m)) \to 0$, $n, m \to \infty$ gilt. Wegen der vorausgesetzten Halbbeschränktheit von A gibt es Funktionen $\psi(x)$ und $\omega(x)$ mit den in Satz 3 genannten Eigenschaften, zu denen wir noch $p(\omega'\psi - \omega\psi') = 1$ hinzuverlangen. Es ist $u(x)$ von der Form

$$(13)\qquad u(x) = u_1\,\omega(x) + \psi(x)\int_l^x \omega(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)\,d\xi - \omega(x)\int_l^x \psi(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)\,d\xi\,.$$

Es gibt ein δ, so daß $\psi(x) \neq 0$, $\omega(x) \neq 0$ in $l < x \leq \delta$. Wir werden unter σ_n, τ_n Zahlen verstehen mit den Eigenschaften

$$(14)\qquad 1.)\ l < \sigma_n < \tau_n < \delta \qquad 2.)\ \lim_{n\to\infty} \tau_n = l \qquad 3.)\ \frac{1}{2}\left|\frac{\omega(\tau_n)}{\psi(\tau_n)}\right| \geq \left|\frac{\omega(\sigma_n)}{\psi(\sigma_n)}\right|.$$

Daß insbesondere die dritte Forderung erfüllbar ist, folgt aus $\lim\limits_{x=l}\left|\frac{\omega(x)}{\psi(x)}\right| = 0$.
Die Folge $u_n(x)$, die konstruiert werden muß, werden wir jedenfalls so wählen, daß

$$(15)\qquad u_n(x) = 0 \text{ in } l < x < \sigma_n \text{ und } u_n(x) = u(x) \text{ in } \tau_n < x < m$$

ist. Dann wird

$$(16)\qquad (u_n - u, u_n - u) = \int_l^{\sigma_n} |u|^2 k\,dx + \int_{\sigma_n}^{\tau_n} |u_n - u|^2 k\,dx$$

und

$$(u_n - u_m, A(u_n - u_m)) = \int_l^\delta (\bar u_n - \bar u_m)\{-(p(u_n' - u_m'))' + q(u_n - u_m)\}\,dx$$
$$= \int_l^\delta \{p|u_n' - u_m'|^2 + q|u_n - u_m|^2\}\,dx\,.$$

Aus $-(p\psi')' + q\psi = \mu k \psi$ folgt in $l < x < \delta$ jedenfalls
$q = \left(p\,\frac{\psi'}{\psi}\right)' + p\left(\frac{\psi'}{\psi}\right) + \mu k$, also

$$(17)\qquad (u_n - u_m, A(u_n - u_m)) = \int_l^\delta p\,\left|u_n' - u_m' - \frac{\psi'}{\psi}(u_n - u_m)\right|^2 dx +$$
$$+ \mu\int_l^\delta |u_n - u_m|^2 k\,dx\,.$$

Gesucht wird eine Folge von Funktionen $u_n(x)$, für welche die rechten Seiten von (16) und (17) mit $n, m \to \infty$ gegen Null gehen, für die (15) gilt und die natürlich in $\mathfrak{A}_\vartheta$ liegen müssen, was neben (15) nunmehr bedeutet, daß u, u' stetig und u'' stückweise stetig sein muß. Da aber die rechten Seiten von (16) und (17) die zweiten Ableitungen von $u_n(x)$ gar nicht enthalten, ist die Existenz der gewünschten Folge $u_n(x)$ auch dann schon gesichert, wenn $(u_n - u, u_n - u) \to 0$, $(u_n - u_m, A(u_n - u_m)) \to 0$, $n, m \to \infty$ gilt mit einer Folge von Funktionen $u_n(x) = \varphi_n(x)$, die (15) erfüllen und in $l < x < m$ stetig und

einmal stückweise stetig differenzierbar sind. Eine solche Folge $\varphi_n(x)$ bekommen wir, indem wir zu (15) hinzuverlangen $\varphi_n(x) = a_n\,\psi(x) + b_n\,\omega(x)$ in $\sigma_n < x < \tau_n$, wobei die Konstanten a_n, b_n so bestimmt werden, daß $\varphi_n(\sigma_n) = 0$, $\varphi_n(\tau_n) = u(\tau_n)$ wird, also

$$a_n = -\frac{\omega(\sigma_n)\,u(\tau_n)}{\psi(\sigma_n)\,\omega(\tau_n) - \psi(\tau_n)\,\omega(\sigma_n)},\quad b_n = \frac{\psi(\sigma_n)\,u(\tau_n)}{\psi(\sigma_n)\,\omega(\tau_n) - \psi(\tau_n)\,\omega(\sigma_n)},$$

da nach (14.3) der Nenner nicht verschwindet. Nach (14) wird weiter $|a_n| \leqq \left|\frac{u(\tau_n)}{\psi(\tau_n)}\right|$, $b_n \leqq 2\,\left|\frac{u(\tau_n)}{\omega(\tau_n)}\right|$. Wegen (13) wird $\lim\limits_{x\to l}\left|\frac{u(x)}{\psi(x)}\right| = 0$, also ist $|a_n|$ beschränkt und wegen

$$|b_n| \leqq 2\,|u_1| + 2\left|\frac{\psi(\tau_n)}{\omega(\tau_n)}\right| \cdot \left(\int_l^{\tau_n}|\omega(\xi)|^2\,k(\xi)\,d\,\xi\right)^{\frac12} \left(\int_l^{\tau_n}|j(\xi)|^2\,k(\xi)\,d\,\xi\right)^{\frac12} + \\ + 2\left|\int_l^{\tau_n}\psi(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)\,d\,\xi\right|$$

und der Aussage 4 von Satz 3 ist es auch $|b_n|$.

Es wird

$$\int_l^{\sigma_n}|u|^2 k\,d\,x + \int_{\sigma_n}^{\tau_n}|\varphi_n - u|^2 k\,d\,x \leqq \int_l^{\sigma_n}|u|^2 k\,d\,x + 2\int_{\sigma_n}^{\tau_n}|u|^2 k\,d\,x + 2\int_{\sigma_n}^{\tau_n}(|a_n|^2 + |b_n|^2)(|\psi|^2 + |\omega|^2)\,k\,d\,x$$

und die rechte Seite geht offenbar gegen Null, wenn $n \to \infty$. Es muß jetzt noch $\int_l^{\delta} p\left|\varphi_n' - \varphi_m' - \frac{\psi'}{\psi}(\varphi_n - \varphi_m)\right|^2 d\,x \to 0$, $n, m \to \infty$ gezeigt werden. Sei $\tau = \operatorname{Max}(\tau_n, \tau_m)$, also $\varphi_n(x) = \varphi_m(x) = u(x)$ in $\tau \leqq x \leqq \delta$. Es wird

$$\int_l^{\delta} p\left|\varphi_n' - \varphi_m' - \frac{\psi'}{\psi}(\varphi_n - \varphi_m)\right|^2 d\,x = \int_l^{\tau} p\left|\varphi_n' - \varphi_m' - \frac{\psi'}{\psi}(\varphi_n - \varphi_m)\right|^2 d\,x \leqq$$

$$\leqq 2\int_l^{\tau} p\left|\varphi_n' - \frac{\psi'}{\psi}\varphi_n\right|^2 d\,x + 2\int_l^{\tau} p\left|\varphi_m' - \frac{\psi'}{\psi}\varphi_m\right|^2 d\,x \leqq 2\int_{\sigma_n}^{\tau_n} p\left|\varphi_n' - \frac{\psi'}{\psi}\varphi_n\right|^2 d\,x +$$

$$+ 2\int_{\tau_n}^{\tau} p\left|u' - \frac{\psi'}{\psi}u\right|^2 d\,x + 2\int_{\sigma_m}^{\tau_m} p\left|\varphi_m' - \frac{\psi'}{\psi}\varphi_m\right|^2 d\,x + 2\int_{\tau_m}^{\tau} p\left|u' - \frac{\psi'}{\psi}u\right|^2 d\,x \leqq$$

$$\leqq 2\int_{\sigma_n}^{\tau_n} p\left|\frac{b_n(\omega'\psi - \psi'\omega)}{\psi}\right|^2 d\,x + 2\int_{\sigma_m}^{\tau_m} p\left|\frac{b_m(\omega'\psi - \psi'\omega)}{\psi}\right|^2 d\,x + 4\int_0^{\tau} p\left|u' - \frac{\psi'}{\psi}u\right|^2 d\,x.$$

Daß das dritte Integral der rechten Seite existiert, ergibt sich so. Nach (13) ist

$$u'(x) - \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,u(x) = u_1\left(\omega'(x) - \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,\omega(x)\right) + \\ + \left(-\,\omega'(x) + \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,\omega(x)\right)\int_l^x \psi(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)\,d\,\xi = \\ = u_1\,\frac{1}{p(x)\,\psi(x)} - \frac{1}{p(x)\,\psi(x)}\int_l^x \psi(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)\,d\,\xi.$$

$$p(x)\left|u'(x) - \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\,u(x)\right|^2 \leqq$$

$$\leqq 2\,|u_1|^2\,\psi^{-2}(x)\,p^{-1}(x) + 2\,\psi^{-2}(x)\,p^{-1}(x)\left|\int_l^x \psi(\xi)\,j(\xi)\,k(\xi)\,d\,\xi\right|^2.$$

Nach Satz 3 Behauptung 3 existiert aber $\int\limits_l^\delta \psi^{-2} p^{-1} d\,x$ und daher auch $\int\limits_0^\tau p \left| u' - \frac{\psi'}{\psi} u \right|^2 d\,x$. Es wird nunmehr

$$\int\limits_l^\delta p \left| \varphi_n' - \varphi_m' - \frac{\psi'}{\psi} (\varphi_n - \varphi_m) \right|^2 d\,x \leqq 2\,|b_n|^2 \int\limits_{\sigma_n}^{\tau_n} \psi^{-2} p^{-1} d\,x + 2\,|b_m|^2 \int\limits_{\sigma_m}^{\tau_m} \psi^{-2} p^{-1} d\,x +$$

$$+ 4 \int\limits_0^\tau p \left| u' - \frac{\psi'}{\psi} u \right|^2 d\,x, \text{ also } \lim_{n, m \to \infty} \int\limits_l^\delta p \left| \varphi_n' - \varphi_m' - \frac{\psi'}{\psi} (\varphi_n - \varphi_m) \right|^2 d\,x = 0.$$

Damit ist Satz 5 bewiesen.

§ 6. Die Beziehung $A \geqq B$ und eine weitere Charakterisierung der ausgezeichneten Randbedingung.

Von zwei in einem Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ beschränkten selbstadjungierten Operatoren A und B sagt man, es sei $A \geqq B$, wenn $(f, B\,f) \leqq (f, A\,f)$ für alle f aus $\mathfrak{H}$.

Um auch für nicht beschränkte selbstadjungierte Operatoren A, B zu einer Definition von $A \geqq B$ zu gelangen, überlegen wir folgendes. Wenn die selbstadjungierten Operatoren A und B beschränkt sind, dann läßt sich zeigen: Es ist $A \geqq B$ dann und nur dann, wenn es eine reelle Zahl c gibt, mit der gilt:

1.) $A + c \geqq 0$, $\quad B + c \geqq 0$ $\quad$ 2.) $R = (A + c)^{-1}$ und $S = (B + c)^{-1}$ sind beschränkte Operatoren. 3.) $R \leqq S$. (Dieser Satz ist leicht zu beweisen — er ist in dem folgenden Hilfssatz 4 enthalten.) Diese Tatsache veranlaßt uns zu folgender

Definition 1a. *Es seien A und B zwei selbstadjungierte (nach unten) halbbeschränkte Operatoren in den Teilräumen $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ eines Hilbertschen Raumes. Dann heißt $A \geqq B$, wenn es eine reelle Zahl c gibt, mit der gilt 1.) $(u, A\,u) + c\,(u, u) \geqq 0$ für alle u aus $\mathfrak{A}$ und $(v, B\,v) + c\,(v, v) \geqq 0$ für alle v aus $\mathfrak{B}$ 2.) $R = (A + c)^{-1}$ und $S = (B + c)^{-1}$ sind beschränkte Operatoren 3.) $R \leqq S$.*

Ersichtlich wird hier $A \geqq B$ nur für selbstadjungierte Operatoren definiert, die nach unten halbbeschränkt sind. Die folgenden Ausführungen sollen die Definition 1 von einer anderen Seite her verständlich machen. Dazu stellen wir einige bekannte Definitionen und Tatsachen zusammen.

Definition 2. *Der Hermitesche Operator A in $\mathfrak{A}$ heißt wesentlich selbstadjungiert, wenn es eine selbstadjungierte Fortsetzung A in $\mathfrak{D}$ derart gibt, daß zu jedem u aus $\mathfrak{D}$ eine Folge u_n aus $\mathfrak{A}$ existiert, mit der $\| u_n - u \| \to 0$, $\| A\,(u_n - u_m) \| \to 0$, $n, m \to \infty$ gilt. Man nennt A in $\mathfrak{D}$ die aus A in $\mathfrak{A}$ durch Abschließen entstandene selbstadjungierte Fortsetzung.*

A in $\mathfrak{D}$ ist durch A in $\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt.

Hilfssatz 3. *Es sei P in $\mathfrak{P}$ selbstadjungiert und $(u, P\,u) \geqq 0$ für u aus $\mathfrak{P}$. Dann gibt es einen und nur einen selbstadjungierten Operator, wir nennen ihn $P^{\frac{1}{2}}$ in $\mathfrak{P}_{\frac{1}{2}}$, mit den beiden Eigenschaften: 1.) $(u\; P^{\frac{1}{2}} u) \geqq 0$ für u aus $\mathfrak{P}_{\frac{1}{2}}$. 2.) es liegt $P^{\frac{1}{2}} u$ in $\mathfrak{P}_{\frac{1}{2}}$, wenn u in $\mathfrak{P}$ liegt, und es ist $P^{\frac{1}{2}} (P^{\frac{1}{2}} u) = P\,u$ für alle u aus $\mathfrak{P}$.*

Wenn $P = \int_0^\infty \lambda\, d\, E_\lambda$ *ist, dann* $P^{\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \lambda^{\frac{1}{2}}\, d\, E_\lambda$ *und* $\mathfrak{P}_{\frac{1}{2}}$ *besteht aus allen* u *mit* $\int_0^\infty \lambda\, d\, (E_\lambda u, u) < \infty$. *Es ist* $P^{\frac{1}{2}}$ *in* $\mathfrak{P}$ *wesentlich selbstadjungiert.*

Beweis klar.

Definition 3. *Der Operator* A *in* $\dot{\mathfrak{A}}$ *heißt hinreichend selbstadjungiert, wenn es eine wesentlich selbstadjungierte nach unten halbbeschränkte Fortsetzung* A *in* $\mathfrak{A}$ *derart gibt, daß zu jedem* u *aus* $\mathfrak{A}$ *eine Folge* u_n *aus* $\dot{\mathfrak{A}}$ *existiert, mit der* $\|u_n - u\| \to 0$, $((u_n - u_m), A\,(u_n - u_m)) \to 0$, $n, m \to \infty$ *gilt. Wir nennen* A *in* $\mathfrak{A}$ *eine (zu* A *in* $\dot{\mathfrak{A}}$*) zugehörige wesentlich selbstadjungierte Fortsetzung.*

Wenn u ein Element aus $\mathfrak{A}$ ist und u_n irgendeine Folge aus $\dot{\mathfrak{A}}$ mit $\|u_n - u\| \to 0$, $(u_n - u_m, A\,(u_n - u_m)) \to 0$, $n, m \to \infty$, dann ist auch $(u_n - u, A\,(u_n - u)) \to 0$. Denn wählt man a so, daß $(v, (A + a)\,v) \geqq (v, v)$ für alle v aus $\mathfrak{A}$, also auch für alle v aus $\mathfrak{D}$ ist (vgl. Def. 2), dann läßt sich nach Hilfssatz 3 der selbstadjungierte Operator $(A + a)^{\frac{1}{2}}$ in $\mathfrak{D}_{\frac{1}{2}}$ erklären und es ist $\dot{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}_{\frac{1}{2}}$; es wird mit unserem u jetzt $\|u_n - u\| \to 0$, $\|(A + a)^{\frac{1}{2}}\,(u_n - u_m)\| \to 0$, $n, m \to \infty$. Also auch $\|(A + a)^{\frac{1}{2}}\,(u_n - u)\| \to 0$, $(u_n - u, (A + a)\,(u_n - u)) \to 0$, $(u_n - u, A\,(u_n - u)) \to 0$, $n \to \infty$. Definiert man $(v, u)_A = ((A + a)^{\frac{1}{2}}\,v, (A + a)^{\frac{1}{2}}\,u)$ und $\|u\|_A = \{(u, u)_A\}^{\frac{1}{2}}$, so kann man auch sagen, $\dot{\mathfrak{A}}$ liegt dicht in $\mathfrak{A}$ mit der Metrik $\|u\|_A$. Da $A + a$ in $\mathfrak{A}$ wesentlich selbstadjungiert ist, gibt es zu u aus $\mathfrak{D}$ eine Folge v_n aus $\mathfrak{A}$ mit $\|u_n - u\| \to 0$, $\|(A + a)\,(u_n - u)\| \to 0$, $n \to \infty$. Aber

$((A + a)^{\frac{1}{2}}\,(u_n - u), (A + a)^{\frac{1}{2}}\,(u_n - u)) = (u_n - u, (A + a)\,(u_n - u)) \leqq$ $\leqq \|u_n - u\|\,\|(A + a)\,(u_n - u)\| \to 0, n \to \infty$. Also auch $\|(A + a)^{\frac{1}{2}}\,(u_n - u)\| \to$ $\to 0, n \to \infty$. Also liegt $\mathfrak{A}$ dicht in $\mathfrak{D}$ mit der Metrik $\|u\|_A$. Und natürlich auch $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{D}_{\frac{1}{2}}$. Also liegt $\dot{\mathfrak{A}}$ in $\mathfrak{D}_{\frac{1}{2}}$ dicht mit der Metrik $\|u\|_A$ oder: $(A + a)^{\frac{1}{2}}$ in $\dot{\mathfrak{A}}$ ist wesentlich selbstadjungiert. Ein hinreichend selbstadjungierter Operator A in $\dot{\mathfrak{A}}$ kann demnach nur eine einzige zugehörige wesentlich selbstadjungierte Fortsetzung haben, die zugleich selbstadjungiert ist, eben A in $\mathfrak{D}$.

Wenn A in $\dot{\mathfrak{A}}$ hinreichend selbstadjungiert ist, dann läßt sich die in $\dot{\mathfrak{A}}$ erklärte Form $(v, A\,u)$ „durch Abschließen" eindeutig auf eine in $\mathfrak{D}_{\frac{1}{2}}$ erklärte Form $(v\,A\,u)$ fortsetzen. (Beachte das Fehlen eines Kommas in $(v\,A\,u)$; es ist ja in $\mathfrak{D}_{\frac{1}{2}}$ nicht $(v\,A\,u) = (v, A\,u)$ erklärbar!) Dazu wähle man Folgen u_n, v_n aus $\dot{\mathfrak{A}}$ mit $\|u_n - u\|_A \to 0$, $\|v_n - v\|_A \to 0$ und erkläre $(v\,A\,u) = \lim_{n \to \infty} (v_n, A\,u_n)$. Es heißt $(v\,A\,u)$ in $\mathfrak{D}_{\frac{1}{2}}$ die zu $(v, A\,u)$ in $\dot{\mathfrak{A}}$ (oder $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{D}$) gehörige abgeschlossene Form. Es ist $(v\,A\,u) = (v, A\,u)$ für v aus $\mathfrak{D}_{\frac{1}{2}}$ und u aus $\mathfrak{D}$.

Der Inhalt der Definitionen 2 und 3 und des Hilfssatzes 3 und die anschließenden Bemerkungen sind wohlbekannt[9]).

[9]) Vgl. K. FRIEDRICHS Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. Math. Ann. **109**, 465—487 (1934).

Hilfssatz 4. *Es seien A in $\mathfrak{A}$, B in $\mathfrak{B}$ selbstadjungiert und nach unten halbbeschränkt und $(v\,A\,u)$ in $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}$, $(v\,B\,u)$ in $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$ seien die zugehörigen abgeschlossenen Formen. Es sei $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}$ in $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$ enthalten und $(u\,A\,u) \geqq (u\,B\,u)$ für u in $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}$. Wenn dann c eine Zahl ist, für welche $(u, (A + c)\,u) \geqq 0$ in $\mathfrak{A}$ und $(u, (B + c)\,u) \geqq 0$ in $\mathfrak{B}$ ist, während $R = (A + c)^{-1}$, $S = (B + c)^{-1}$ beschränkte Operatoren in $\mathfrak{H}$ sind, dann gilt $(f, R\,f) \leqq (f, S\,f)$ für alle f aus $\mathfrak{H}$.*

Beweis. Wir setzen $A + c = P$, $B + c = Q$, dann wird $(u\,Q\,u) \leqq \leqq (u\,P\,u)$ für alle u aus $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}$. Wegen $(u\,Q\,u) \geqq 0$ für u aus $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$ ist $|(v\,Q\,u)|^2 \leqq \leqq (u\,Q\,u)\,(v\,Q\,v) \leqq (u\,P\,u)\,(v\,Q\,v)$ für alle u aus $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}$, v aus $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$. Wir wählen $u = R\,f$ und $v = S\,f$, f beliebig aus $\mathfrak{H}$. Dann liegt u in $\mathfrak{A}$ und v in $\mathfrak{B}$. Also $(v\,Q\,u) = (Q\,v, u)$, $(v\,Q\,v) = (Q\,v, v)$, $(u\,P\,u) = (P\,u, u)$ und daher $|(Q\,v, u)|^2 \leqq \leqq (P\,u, u) \cdot (Q\,v, v)$ oder $|(f, R\,f)|^2 \leqq (f, R\,f) \cdot (f, S\,f)$, d. h. $(f, R\,f) \leqq (f, S\,f)$ für alle f aus $\mathfrak{H}$.

Definition 1b. *Es seien A in $\mathfrak{A}$ und B in $\mathfrak{B}$ selbstadjungiert und (nach unten) halbbeschränkt. Dann heißt $A \geqq B$, wenn gilt: 1.) Für die zugehörigen abgeschlossenen Formen $(v\,A\,u)$ in $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}$ und $(v\,B\,u)$ in $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$ ist $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}} \subseteq B_{\frac{1}{2}}$. 2.) Für alle u aus $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}$ ist $(u\,A\,u) \geqq (u\,B\,u)$.*

Wir beweisen die Äquivalenz der beiden Definitionen 1a und 1b. Seien zunächst die Voraussetzungen der Definition 1b erfüllt. Dann gibt es eine Zahl c, so daß $(u, A\,u) + c\,(u, u) \geqq (u, u)$ für u aus $\mathfrak{A}$ und $(v, B\,v) + c\,(v, v) \geqq \geqq (v, v)$ für v aus $\mathfrak{B}$ wird. Mit diesem c sind $R = (A + c)^{-1}$ und $S = (B + c)^{-1}$ beschränkte Operatoren, für die $(f, R\,f) \leqq (f, S\,f)$ für alle f aus $\mathfrak{H}$ gilt (Hilfssatz 4). D. h. aber alle Bestimmungsstücke der Definition 1a sind erfüllt. — Sei nun umgekehrt $A \geqq B$ gemäß der Definition 1a. Dann sind A und B halbbeschränkt nach unten und mit einem geeigneten c ist $A + c \geqq 0$, $B + c \geqq 0$; $R = (A + c)^{-1}$, $S = (B + c)^{-1}$ sind beschränkt und $(f, R\,f) \leqq \leqq (f, S\,f)$. Wegen $R \geqq 0$, $S \geqq 0$ kann man $R = R^{\frac{1}{2}} \cdot R^{\frac{1}{2}}$, $S = S^{\frac{1}{2}} \cdot S^{\frac{1}{2}}$ setzen und erhält $\|R^{\frac{1}{2}}\,f\| \leqq \|S^{\frac{1}{2}}\,f\|$. Der Wertbereich von $R^{\frac{1}{2}}$ ist daher in dem von $S^{\frac{1}{2}}$ enthalten[10]). Offenbar ist $(A + c)^{\frac{1}{2}}$ die Reziproke von $R^{\frac{1}{2}}$ und $(B + c)^{\frac{1}{2}}$ die von $S^{\frac{1}{2}}$. Also ist der Definitionsbereich $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}$ von $(A + c)^{\frac{1}{2}}$ in dem Definitionsbereich $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$ von $(B + c)^{\frac{1}{2}}$ enthalten. Aus $\|R^{\frac{1}{2}}\,f\| \leqq \|S^{\frac{1}{2}}\,f\|$ wird für v aus $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$ und $f = (B + c)^{\frac{1}{2}}\,v$ offenbar $\|R^{\frac{1}{2}}\,(B + c)^{\frac{1}{2}}\,v\| \leqq \|v\|$. Also $|(v, (B + c)^{\frac{1}{2}}\,R^{\frac{1}{2}}\,g)| = |(R^{\frac{1}{2}}\,(B + c)^{\frac{1}{2}}\,v, g)| \leqq \|v\|\,\|g\|$ für v aus $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$ und g aus $\mathfrak{H}$; da $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$ in $\mathfrak{H}$ dicht liegt, gilt die Ungleichung $(v, (B + c)^{\frac{1}{2}}\,R^{\frac{1}{2}}\,g) \leqq \|v\|\,\|g\|$ sogar für alle v aus $\mathfrak{H}$. Mit $v = (B + c)^{\frac{1}{2}}\,R^{\frac{1}{2}}\,g$ wird $\|(B + c)^{\frac{1}{2}}\,R^{\frac{1}{2}}\,g\| \leqq \|g\|$ und mit $g = (A + c)^{\frac{1}{2}}\,u$ auch $\|(B + c)^{\frac{1}{2}}\,u\| \leqq \|(A + c)^{\frac{1}{2}}\,u\|$ für alle u aus $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}$. Das bedeutet aber, $(u\,B\,u) \leqq (u\,A\,u)$ für alle u aus $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}$. Damit ist die Äquivalenz der Definitionen 1a und 1b vollständig bewiesen.

---

[10]) Hilfssatz 8 von Störungstheorie der Spektralzerlegung V. Math. Ann. **118**, 480 (1942).

Definition 4. *Es seien A in $\mathfrak{A}$ und B in $\mathfrak{B}$ wesentlich selbstadjungiert und nach unten halbbeschränkt. Dann heißt $A \geqq B$, wenn diese Beziehung für die selbstadjungierten Fortsetzungen von A bzw. B gemäß Definition* 1a *oder* 1b *erfüllt ist.*

Wenn A und B wesentlich selbstadjungiert sind und gleichzeitig $A \geqq B$ und $B \geqq A$ gilt, dann sind die selbstadjungierten Fortsetzungen von A bzw. B identisch. Beweis sofort aus Definition 4 und Definition 1b.

Satz 6. *Es seien A und B selbstadjungiert, und es sei $A \geqq B$. Die (von oben stetige) Spektralschar von A heiße E_λ, die von B heiße F_μ. Dann gilt:*

1.) *Wenn α ein Intervall $\alpha_1 (\leqq) \lambda (\leqq) \alpha_2$ und β ein Intervall $\beta_1 (\leqq) \mu (\leqq) \beta_2$ (unendlich lange und punktförmige Intervalle zugelassen) bedeutet, dann kann nicht α ganz unter β liegen (das soll heißen: es kann nicht $\lambda < \mu$ für jedes λ aus α und jedes μ aus β gelten), sobald der zu α gehörige Spektralraum von A mit dem zu β gehörigen Spektralraum von B ein von Null verschiedenes Element gemeinsam hat.*

2.) *Bedeutet λ^* den kleinsten Häufungspunkt des Spektrums von A und μ^* den von B, dann ist $\lambda^* \geqq \mu^*$. Wenn $\lambda^* = \mu^* = \nu$ und wenn das Spektrum von A unterhalb ν genau aus den Punkten $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$ besteht, dann besteht das Spektrum von B unterhalb ν genau aus den Punkten $\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \cdots$, und es ist $\mu_n \leqq \lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Hier ist $\mu_* = +\infty$ zugelassen.*

Dieser Satz ist eine allgemeine Formulierung von Tatsachen, die insbesondere durch Arbeiten von Courant und Friedrichs wohlbekannt sind.

Beweis. 1.) Wegen $A \geqq B$ ist nach Definition 1b auch $(u\, A\, u) \geqq (u\, B\, u)$ für jedes u aus $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}$, also $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d\,(E_\lambda u, u) \geqq \int_{-\infty}^{+\infty} \mu\, d\,(F_\mu u, u)$. Bezeichne $E(\alpha)$ bzw. $F(\beta)$ die Projektion, die zu dem Intervall α bzw. β gehört und gebe es ein $\varphi \neq 0$ mit $\varphi = E(\alpha)\,\varphi = F(\beta)\,\varphi$, dann $\int_\alpha \lambda d\,(E_\lambda \varphi, \varphi) \geqq \int_\beta \mu\, d\,(F_\mu \varphi, \varphi)$, also $\alpha_2 \geqq \beta_1$, wobei sogar $\alpha_2 > \beta_1$ ist, wenn entweder $\lambda = \alpha_2$ oder $\mu = \beta_1$ *nicht* zu α bzw. β gehört. Also kann nicht α ganz unter β liegen.

2.) Wäre $\lambda^* < \mu^*$, dann wähle man ein μ' mit $\lambda^* < \mu' < \mu^*$. Damit φ im Spektralraum von B zum Intervall $\mu' < \mu < \infty$ liegt, genügt es, daß φ orthogonal steht auf den endlich vielen Eigenfunktionen von B, deren Eigenwerte kleiner gleich μ' sind. Der Spektralraum von A zum Intervall $-\infty < \lambda < \mu'$ ist aber unendlichdimensional, enthält also ein solches $\varphi \neq 0$. Nach 1. Widerspruch. — Sei nun $\lambda^* = \mu^* = \nu$. Es seien $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n < \nu$ alle Punkte des Spektrums von A (mehrfache mehrfach gezählt), welche $\lambda = \lambda_n$ nicht übersteigen. Es sei $\mu' \leqq \nu$ eine solche Zahl, daß der Spektralraum von B zum Intervall $-\infty < \mu < \mu'$ höchstens $(n-1)$-dimensional ist, während er zum Intervall $-\infty < \mu < \mu''$ mindestens n-dimensional ausfällt für jedes $\mu'' > \mu'$. Dann gibt es in dem Spektralraum von A zum Intervall $-\infty < \lambda \leqq \lambda_n$ ein $\varphi \neq 0$, welches zugleich im Spektralraum von B zum Intervall $\mu' \leqq \mu < \infty$ liegt, also $\lambda_n > \mu'$. Da demnach $\mu' < \nu$ ist, muß μ' nach Definition ein Eigenwert von B sein. Wir setzen $\mu' = \mu_n$ und haben $\mu_n \leqq \lambda_n$. Es gibt offenbar Eigenwerte $\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \cdots \leqq \mu_{n-1}$ von B mit $\mu_{n-1} \leqq \mu_n$. Denken wir $\mu_1 \leqq \lambda_1, \ldots, \mu_{n-1} \leqq \lambda_{n-1}$ schon bewiesen, so haben wir nun auch $\mu_k \leqq \lambda_k$ für $k = n$ gezeigt. Wenn A unendlich viele Eigenwerte $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$ unter ν besitzt, dann auch B.

Satz 7. *Es sei A in $\mathfrak{A}$ und B in $\mathfrak{B}$ wesentlich selbstadjungiert (Definition 2) und nach unten halbbeschränkt. In einem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gemeinsamen Teilraum $\mathfrak{T}$ sei A hinreichend selbstadjungiert (Definition 3) und $(u, A\,u) \geqq (u, B\,u)$ für u aus $\mathfrak{T}$. Dann ist $A \geqq B$ (Definition 4).*

Beweis. Es seien $(v\,A\,u)$ in $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}$ bzw. $(v\,B\,u)$ in $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$ die zu $(v, A\,u)$ in $\mathfrak{A}$ bzw. $(v, B\,u)$ in $\mathfrak{B}$ gehörigen abgeschlossenen Formen. Wir wollen zeigen: $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}} \subseteq \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$. Sei also u Element von $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}$. Dann gibt es eine Folge u_n aus $\mathfrak{T}$ mit $\|u_n - u\| \to 0$, $(u_n - u_m, A\,(u_n - u_m)) \to 0$, $n, m \to \infty$. Die u_n liegen aber auch in $\mathfrak{B}$, außerdem ist $(u_n - u_m, A\,(u_n - u_m)) \geqq (u_n - u_m, B\,(u_n - u_m)) \to 0$, $n, m \to \infty$. Also liegt u auch in $\mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$, d. h. $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}} \subseteq \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$ und $(u\,A\,u) \geqq (u\,B\,u)$ für alle u aus $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}$. Nach Definition 4 bzw. 1b ist $A \geqq B$, womit Satz 7 bewiesen ist.

Von diesem Satz 7 machen wir eine Anwendung auf die Operatoren A in $\mathfrak{A}_\vartheta$, $0 \leqq \vartheta < \pi$, wie sie in Satz 5 definiert sind. Schreiben wir A_ϑ für A in $\mathfrak{A}_\vartheta$, dann werden wir beweisen $A_0 \geqq A_\vartheta$ für $0 < \vartheta < \pi$. Dazu bemerken wir, daß A_0 in $\mathfrak{A}_0$ und A_ϑ in $\mathfrak{A}_\vartheta$ wesentlich selbstadjungiert und nach unten halbbeschränkt sind. In dem sowohl in $\mathfrak{A}_0$ als auch in $\mathfrak{A}_\vartheta$ liegenden Teilraum $\mathfrak{T}$ (vgl. Satz 5) stimmen A_0 und A_ϑ überein. Nach Satz 5 ist A_0 in $\mathfrak{T}$ hinreichend selbstadjungiert. Also sind alle Voraussetzungen von Satz 7 erfüllt und $A_0 \geqq A_\vartheta$ für $0 < \vartheta < \pi$ ist bewiesen. Die „ausgezeichnete" Randbedingung macht also den Operator maximal. Wäre umgekehrt $A_\tau \geqq A_\vartheta$ für ein festes τ aus $0 \leqq \tau < \pi$ und alle $\vartheta \neq \tau$ aus $0 \leqq \vartheta < \pi$, dann würde für die selbstadjungierten Fortsetzungen von A_τ und A_ϑ, falls $\tau \neq 0$ wäre, sowohl $A_\tau \geqq A_0$ als auch $A_0 \geqq A_\tau$, also $A_0 = A_\tau$, also $0 = \tau$ gelten. Diese Charakterisierung der ausgezeichneten Randbedingung ist deshalb nützlich, weil sie gemäß Satz 6 direkt Schlüsse auf das Spektrum gestattet.

Eine andere Anwendung von Satz 7 zeigt

Satz 8 [11]). *Es seien $q(x)$ und $Q(x)$ in $0 \leqq x < \infty$ stückweise stetig und $Q(x) \geqq q(x)$. Es gebe in $0 \leqq x < \infty$ ein vollständiges orthogonales und normiertes Funktionensystem $\psi_n(x)$ mit $-\psi_n'' + q(x)\,\psi_n = \mu_n\,\psi_n$, $\psi_n(0)\cos\alpha + \psi_n'(0)\sin\alpha = 0$, $n = 1, 2, \cdots$ und $\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \cdots \leqq \mu_n \to \infty$, $n \to \infty$.*

Dann liegt sowohl für $-u'' + q(x)\,u = \lambda\,u$, als auch für $-u'' + Q(x)\,u = \lambda\,u$ bei $x = +\infty$ der Grenzpunktfall vor. Das Spektrum von

$$-u'' + Q(x)\,u = \lambda\,u, \quad u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0, \quad 0 \leqq x < \infty$$

ist diskret, und bei Anordnung der Eigenwerte λ_n nach ihrer Größe gilt $\lambda_n \geqq \mu_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Beweis. Der Operator $B\,u = -u'' + q(x)\,u$ ist wesentlich selbstadjungiert im Raum aller endlichen Linearkombinationen der $\psi_1, \psi_2, \ldots$. Wir setzen ihn durch Abschließen fort zu einem selbstadjungierten Operator B in $\mathfrak{D}_\alpha$. Bezeichnet $\dot{\mathfrak{A}}_\alpha$ die Gesamtheit der Funktionen $u(x)$, für die in $0 \leqq x < \infty$ gilt: u, u' stetig, u'' stückweise stetig, $u \equiv 0$ in einer Umgebung von $x = \infty$, $u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0$, dann $\dot{\mathfrak{A}}_\alpha \subseteq \mathfrak{D}_\alpha$. Denn sei $w(x)$ in $\dot{\mathfrak{A}}_\alpha$. Wegen

[11]) Titchmarsh, E. C.: Some theorems on perturbation theory, Proc. R. Soc., London, A **200**, 34—46 (1949), insb. § 5, S. 38. Das Analogon zu diesem Satz für den regulären Fall ist wohlbekannt, vgl. Courant-Hilbert loc. cit. 3 S. 357 Satz 7.

$\int\limits_0^\infty |w|^2\, d\,x < \infty$, $\int\limits_0^\infty |B\,w|^2\, d\,x < \infty$ gilt $w_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu\, \psi_\nu \to w$, $n \to \infty$ und $\sum\limits_{\nu=1}^{n} b_\nu\, \psi_\nu \to B\,w$, $n \to \infty$. Dabei ist $c_\nu = (\psi_\nu, w_n)$ und $b_\nu = (\psi_\nu, B\,w) =$

$$= \int\limits_0^\infty \overline{\psi_\nu}\,(-\,w'' + q\,w)\, d\,x = \int\limits_0^\infty \overline{(-\,\psi_\nu'' + q\,\psi_\nu)}\, w\, d\,x = \lambda_\nu \int\limits_0^\infty \overline{\psi_\nu}\, w\, d\,x = \lambda_\nu\, c_\nu.$$

Also $w_n \to w$, $B\,w_n \to B\,w$, d. h. aber w liegt in $\mathfrak{D}_\alpha$. Es ist B in $\mathfrak{D}_\alpha$ halbbeschränkt, weil $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \infty$. Also auch in $\dot{\mathfrak{A}}_\alpha$, also B halbbeschränkt schlechthin. Auf Grund der Bemerkung im letzten Absatz von § 2 (mit $k = p = 1$) liegt für $-\,u'' + q\,(x)\,u = \lambda\,u$ bei $x = \infty$ der Grenzpunktfall vor. Der Operator $A\,u = -\,u'' + Q\,(x)\,u$ ist für u aus $\dot{\mathfrak{A}}_\alpha$ erklärt und erfüllt die Beziehung $(u, A\,u) \geqq (u, B\,u)$ für alle u aus $\dot{\mathfrak{A}}_\alpha$. Also ist auch A halbbeschränkt, also liegt (vgl. letzten Absatz von § 2) auch für $-\,u'' + Q\,(x)\,u = \lambda\,u$ bei $x = \infty$ der Grenzpunktfall vor. Da $x = +\,\infty$ für beide Differentialoperatoren Grenzpunktfall ist, so sind A und B nach Satz 1 in $\dot{\mathfrak{A}}_\alpha$ wesentlich selbstadjungiert. Nach Satz 7 (mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{T} = \dot{\mathfrak{A}}_\alpha$) gilt daher $A \geqq B$. Nach Satz 6 ist $\lambda^* = +\,\infty$ der kleinste Häufungspunkt von A, d. h. A hat ein diskretes Spektrum $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots \leqq \lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$, und es gilt $\lambda_n \geqq \mu_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

§ 7. Gegenbeispiele.

Wir zeigen durch ein Beispiel, daß sehr wohl zu jeder (der in § 1 besprochenen) Randbedingungen ein $u\,(x)$ gehören kann, für welches $\int\limits_l^m (p\,|u'|^2 + q\,|u|^2)\, d\,x$ nicht existiert, obwohl der Operator halbbeschränkt ist.

Das Beispiel ist

$$-\,u'' - \left(\frac{1}{4\,x^2} + \frac{1}{4\,(x \log x)^2}\right) u = \lambda\,u, \qquad 0 < x < \frac{1}{2}, \tag{18}$$

also $p\,(x) = k\,(x) = 1$, $q\,(x) = -\,\frac{1}{4\,x^2} - \frac{1}{4\,(x \log x)^2}$, $l = 0$, $m = \frac{1}{2}$.

Bei $x = \frac{1}{2}$ verlangen wir irgend eine Randbedingung der Form $u\left(\frac{1}{2}\right) \cos \eta + u'\left(\frac{1}{2}\right) \sin \eta = 0$. Zur Formulierung der Randbedingung bei $x = 0$ stellen wir zunächst fest, daß (18) für $\lambda = 0$ das Fundamentalsystem

$$\omega\,(x) = x^{\frac{1}{2}} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \psi\,(x) = x^{\frac{1}{2}} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \log \log \frac{1}{x} \tag{19}$$

besitzt, für das $\omega'\,\psi - \psi'\,\omega = 1$ ist. Also liegt bei $x = 0$ der Grenzkreisfall vor und als Randbedingung bei $x = 0$ nehmen wir

$$u_0 \cos \vartheta + u_1 \sin \vartheta = 0, \quad 0 \leqq \vartheta < \pi,$$

wenn u_0, u_1 die Anfangszahlen von $u\,(x)$ in bezug auf $\psi\,(x)$, $\omega\,(x)$ bei $x = 0$ sind. Bei beliebig, aber fest gewählten η, ϑ sei $\mathfrak{A}$ die Gesamtheit der $u\,(x)$, die den genannten Randbedingungen genügt. Wir werden zeigen: es gibt in $\mathfrak{A}$ ein $u\,(x)$, für welches $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left\{ |u'|^2 - \left(\frac{1}{4\,x^2} + \frac{1}{4\,(x \log x)^2}\right) |u|^2 \right\} d\,x = -\,\infty$ ist, obwohl A halbbeschränkt ist.

Die Halbbeschränktheit von A in $\mathfrak{A}$ ist nach § 4 gesichert, wenn A halbbeschränkt ist für alle $u(x)$ aus $\dot{\mathfrak{W}}$ (also u, die in der Umgebung von $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$ identisch verschwinden). Für solche $u(x)$ ist aber

$$(u, A\,u) = \int_l^m \bar{u}\left(-u'' - \frac{1}{4x^2}u - \frac{1}{4(x\log x)^2}u\right)d\,x =$$
$$= \int_l^m \left|u' - \frac{1}{2x}u - \frac{1}{2x\log x}u\right|^2 d\,x,$$

also $(u, A\,u) \geq 0$, also A halbbeschränkt. Natürlich hätte die Halbbeschränktheit auch nach Satz 2a aus der Tatsache gefolgert werden können, daß $\omega(x)$ in $0 < x < \frac{1}{2}$ nicht verschwindet.

Wir greifen nun aus $\mathfrak{A}$ folgende Funktion $u(x)$ heraus. In $0 < x \leq \frac{1}{4}$ soll $u(x) = \sin\vartheta\,\psi(x) - \cos\vartheta\,\omega(x)$ sein, und in $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$ soll $u(x)$ irgendwie (reell) so festgesetzt werden, daß die Gesamtfunktion in $0 < x \leq \frac{1}{2}$ zweimal stetig differenzierbar ist und die Randbedingung auch bei $x = \frac{1}{2}$ erfüllt. Um $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left\{u'^2 - \left(\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4(x\log x)^2}\right)u^2\right\}d\,x = -\infty$ zu beweisen, genügt es offenbar $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{\frac{1}{4}}\left\{u'^2 - \left(\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4(x\log x)^2}\right)u^2\right\}d\,x = -\infty$ für $u(x) = \sin\,\vartheta\,\psi(x) - \cos\vartheta\,\omega(x)$ zu zeigen. Es wird

$$J(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{\frac{1}{4}}\left\{u'^2 - \left(\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4(x\log x)^2}\right)u^2\right\}d\,x =$$
$$= C + \sin^2\vartheta\log\varepsilon\,\frac{1}{2}\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{\log\varepsilon} + \frac{2}{\log\varepsilon}\,\frac{1}{\log\log\frac{1}{\varepsilon}}\right\}$$
$$- \sin 2\,\vartheta\left\{\frac{1}{2}\log\varepsilon\log\log\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right\} + \cos^2\vartheta\,\frac{1}{2}\log\varepsilon,$$

wo C nicht von ε abhängt. Also auch

$$J(\varepsilon) = C + \frac{1}{2}\log\varepsilon\left\{\left[-\cos\vartheta + \sin\vartheta\log\log\frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{\log\varepsilon}\right)\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \sin^2\vartheta\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^2\left(-\frac{1}{\log\varepsilon} - \frac{1}{\log^2\varepsilon} + \frac{2}{\log\varepsilon}\,\frac{1}{\log\log\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right\}.$$

Für $\vartheta = 0$ ist $J(\varepsilon) = C + \frac{1}{2}\log\varepsilon \to -\infty$, $\varepsilon \to 0$. Für $0 < \vartheta < \pi$ ist $J(\varepsilon) \leq C + \sin^2\vartheta\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2\log\varepsilon} + \frac{1}{\log\log\frac{1}{\varepsilon}}\right) \to -\infty$ für $\varepsilon \to 0$.

Damit ist die Behauptung erwiesen.

Bei dem angeführten Beispiel liegt am singulären Ende der Grenzkreisfall vor. Wenn aber der Grenzpunktfall gegeben ist, dann darf man sich nach Satz 1 auf Funktionen beschränken, die in der Umgebung des singulären Endes identisch verschwinden, und für solche Funktionen existiert natürlich $\int_l^m (p\,|u'|^2 + q\,|u|^2)\,d\,x$, insbesondere wird $\int_l^m (p\,|u'|^2 + q\,|u|^2)\,d\,x = (u, A\,u)$,

wenn an beiden Enden der Grenzpunktfall vorliegt und man für u irgend eine Funktion aus dem Teilraum $\dot{\mathfrak{W}}$ nimmt, in dem A nach Satz 1 auch noch wesentlich selbstadjungiert ist. Man könnte daher denken, daß wenigstens wenn bei $x = l$ und bei $x = m$ der Grenzpunktfall vorliegt, bereits im ursprünglichen Raum $\mathfrak{W}$ das Integral $\int_l^m (p\,|u'|^2 + q\,|u|^2)\,d\,x$ existiert und gleich $(u, A\,u)$ ist. Daß dem nicht so ist, lehrt das folgende Beispiel, das ich Herrn Moser verdanke:

$A\,u = -u'' + q\,(x)\,u = \lambda\,u, \quad 0 < x < \infty$ mit

$$q\,(x) = \frac{2}{x^2} - 4\,x^2 \frac{\sin x^4}{2 + \cos x^4} + 16\,x^6 \frac{\cos x^4}{2 + \cos x^4}.$$

Für $\lambda = 0$ hat man eine Lösung $u_0\,(x) = x^{-1}\,(2 + \cos x^4)$ und eine andere Lösung $v_0\,(x) = u_0\,(x) \int_1^x u_0^{-2}\,(t)\,d\,t \geqq x^{-1} \int_1^x t^2 \cdot \frac{1}{9}\,d\,t = \frac{1}{27}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$ für $x > 1$. Also $\int_1^\infty v_0^2\,(x)\,d\,x = \infty$ und $\int_0^1 u_0^2\,(x)\,d\,x = \infty$. Also Grenzpunktfall bei $x = 0$ und bei $x = \infty$. Da $u_0\,(x)$ keine Nullstellen in $0 < x < \infty$ hat, so ist A halbbeschränkt (Satz 2a). Wir wählen für $u\,(x)$ eine in $0 < x < \infty$ zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion, die in $0 < x < \frac{1}{2}$ identisch verschwindet und für $1 \leqq x$ mit $u_0\,(x)$ zusammenfällt. Dann ist $\int_0^\infty u^2\,(x)\,d\,x < \infty$ und $\int_0^\infty (A\,u)^2\,d\,x = \int_{\frac{1}{2}}^1 (-u'' + q\,u)^2\,d\,x < \infty$. Also liegt $u\,(x)$ in $\mathfrak{W}$. Aber $\lim\limits_{a \to \infty} \int_0^a (u'^2 + q\,u^2)\,d\,x$ existiert nicht, weil sonst $\lim\limits_{a \to \infty} u_0\,(a)\,u_0'\,(a)$ existieren müßte, was wegen $u_0\,u_0' = -x^{-3}\,(2 + \cos x^4)^2 - 4\,x\,(2 + \cos x^4)\sin x^4$ nicht der Fall ist.

(Eingegangen am 11. März 1950.)

Math. Annalen, Bd. 122, S. 369—389 (1951).

Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie.

Von

Kurt Schütte in Göttingen.

Einleitung.

Die beweistheoretische Erfassung einer mathematischen Theorie erfolgt durch ein „*Kodifikat*"[1]), d. h. durch ein System, welches nicht nur die mathematischen Beziehungen, sondern auch alle in der betreffenden Theorie auftretenden logischen Schlußweisen formal darstellt. Der Beweis eines mathematischen Satzes erscheint in einem Kodifikat als eine nach bestimmten Regeln aufgebaute Anordnung von Zeichen, eine sog. „*Herleitung*". Auf Grund der Endlichkeit unseres Denkens enthält jeder mathematische Beweis nur eine endliche Anzahl von Schlüssen. Diese Tatsache kommt in den Kodifikaten, welche nur endliche Herleitungen berücksichtigen, zum Ausdruck.

Es gibt jedoch Gründe, welche auch für die Heranziehung von Kodifikaten mit unendlichen Herleitungen sprechen, und zwar besonders für die Verwendung der „*unendlichen Induktion*". Damit ist die Schlußweise gemeint, welche aus der für jede einzelne Zahl bestehenden Gültigkeit eines Satzes die entsprechende All-Aussage folgert[2]). Bei Verwendung dieser Schlußweise mit unendlich vielen Prämissen werden die Herleitungen zu unendlichen Zeichen-Anordnungen. Aber auch solche Kodifikate lassen sich mit der Endlichkeit unseres Denkens in Einklang bringen. Es ist nämlich nur zu verlangen, daß die unendlichen Herleitungen immer in bestimmter Weise gesetzmäßig aufgebaut sind, so daß sie sich auf Grund dieser Gesetzmäßigkeit eindeutig beschreiben lassen. Die Endlichkeit unseres Denkens kommt dann zwar nicht in der Herleitung selbst, wohl aber in der metamathematischen Erfassung der Herleitung zum Ausdruck.

Die Kodifikate, welche die unendliche Induktion enthalten, zeichnen sich gegenüber den engeren Kodifikaten, in welchen nur endliche Herleitungen zugelassen sind, besonders durch „*ω-Vollständigkeit*" aus. Die ω-Unvollstän-

[1]) Bezeichnung nach Arnold Schmidt (Math. Grundlagenforschung, Enzyklopädie der math. Wissenschaften, 2. Auflage, Bd. I, Heft 2), sonst zum Teil auch als „*Formalismus*" bezeichnet (Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik).

[2]) Ein entsprechendes Schlußschema findet sich u. a. bei Hilbert: Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre, Math. Ann. **104** (1931).

digkeit, welche nach GÖDEL[3]) in jedem hinreichend ausdrucksfähigen[4]) engeren Kodifikat vorliegt, besteht darin, daß es immer eine in dem Kodifikat nicht herleitbare generelle Zahlen-Aussage gibt, welche dagegen für jede einzelne Zahl hergeleitet werden kann. Diese ω-Unvollständigkeit wird durch die unendliche Induktion gerade aufgehoben.

Einen weiteren Vorteil bietet die unendliche Induktion dadurch, daß die Herleitungen bei Hinzunahme dieser Schlußweise auch in Kodifikaten, welche die Zahlentheorie umfassen, im Sinne von GENTZEN[5]) *umweglos* geführt werden können, d. h. daß sich das Schlußschema der „*Schnitte*" eliminieren läßt. Dies wurde zuerst von LORENZEN in einem Widerspruchsfreiheitsbeweis der verzweigten Typenlogik[6]) nachgewiesen.

Im folgenden wird ein Beweis der Schnitt-Eliminierbarkeit für ein zahlentheoretisches Kodifikat[7]), das die unendliche Induktion enthält, gegeben. Bei bestimmten Beschränkungen in der Anwendung der unendlichen Induktion, wobei allerdings die ω-Vollständigkeit entfällt, verläuft dieser Beweis auf Grund einer konstruktiv zu gestaltenden transfiniten Induktion. Insbesondere ergibt sich für den von GENTZEN als widerspruchsfrei nachgewiesenen Bereich der „*reinen Zahlentheorie*"[8]) auf diesem Wege ein Widerspruchsfreiheitsbeweis, welcher eine Verbindung zwischen den entsprechenden Beweisen von GENTZEN und LORENZEN[9]) herstellt. Die in dem Widerspruchsfreiheitsbeweis von GENTZEN angewandte Zuordnung von Ordnungszahlen zu den Herleitungen lockert sich hierbei auf, indem der Begriff der „*Höhe*" einer Herleitungs-Formel entbehrlich wird. Die Ordnungszahlen geben hier in einfachster Weise die Stärke einer Herleitung wieder. Es ist unmittelbar zu ersehen, daß zum Widerspruchsfreiheitsbeweis die transfinite Induktion immer bis zu einer ε-Zahl angewendet werden muß, weil nämlich die Herleitungen durch die Schnitt-Beseitigungen entsprechend kompliziert werden. Es scheint mir daher, daß die Zusammenhänge auf dem zuerst von GENTZEN beschrittenen Weg durch die Heranziehung der unendlichen Induktion besonders klar hervortreten. Die hier zugelassene Unendlichkeit der Herleitungen enthält in den gesteckten Grenzen keine besondere Problematik, sondern ist gerade dem hier vorliegenden Sachverhalt angemessen.

Auch die Fragen, welche mit der formalen Herleitbarkeit der transfiniten Induktion zusammenhängen, lassen sich an Hand des hier entwickelten Kodifikats beantworten. Nimmt man die transfinite Induktion bis zu einer Zahl α als Grundformel auf, so ist die transfinite Induktion bis zur nächsten auf α folgenden ε-Zahl nicht mehr durch eine endliche Anzahl von Schlüssen zu beweisen, wohl aber bis zu jeder kleineren Zahl. Damit ist eine Ausweitung

[3]) Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. Mh. Math. Phys. **38** (1931).

[4]) Es wird vorausgesetzt, daß die rekursive Zahlentheorie und die elementaren logischen Gesetze in dem Kodifikat enthalten sind.

[5]) Untersuchungen über das logische Schließen. Math. Z. **39** (1934).

[6]) Erscheint im J. Symb. Log.

[7]) Dieses Kodifikat ist aufgebaut auf dem Kalkül K_1 meiner Arbeit: Schlußweisen-Kalküle der Prädikatenlogik, Math. Ann. **122** (1950).

[8]) Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Math. Ann. **112** (1936).

Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Heft 4, 1938.

[9]) Gemeint ist der im Widerspruchsfreiheitsbeweis der verzweigten Typenlogik enthaltene Sonderfall der Zahlentheorie.

der Untersuchungen gegeben, die GENTZEN über die transfinite Induktion bis zur ersten ε-Zahl durchgeführt hat[10]).

In einer folgenden Abhandlung[11]) wird ein Kodifikat der Analysis auf der Grundlage der verzweigten Typenlogik (ohne Reduzibilitätsaxiom) behandelt und eine finite Darstellung der hier benutzten Ordnungszahlen[12]) und der bei den Induktions-Herleitungen verwendeten Funktionen nachgeholt.

§ 1. Das Kodifikat.

Als Grundzeichen dienen

a) das *Symbol* 0,

b) kleine lateinische Buchstaben $x, y, z, \ldots$ für „*gebundene Zahlvariablen*",

c) Zeichen für „*Funktionen*" (mit einer oder mehreren Argumentstellen), darunter das „*Strichsymbol*" (als Zeichen für eine Funktion mit einer Argumentstelle), welches den Nachfolger $\mathfrak{t}'$ von $\mathfrak{t}$ repräsentiert,

d) Zeichen für „*Prädikate*" (mit einer oder mehreren Argumentstellen), darunter das „*Gleichheitszeichen*" (als Zeichen für ein Prädikat mit zwei Argumentstellen),

e) die „*logischen Zeichen*" $\vee$, $\overline{}$, $(\cdot)$.

„*Terme*" werden folgendermaßen aufgebaut:

a) Das Symbol 0 ist ein Term.

b) Eine Funktion mit Termen als Argumenten ist ein Term. (Insbesondere ist $\mathfrak{t}'$ ein Term, wenn $\mathfrak{t}$ ein Term ist.)[13])

„*Primformeln*" sind Prädikate mit Termen als Argumenten.

„*Formeln*" werden folgendermaßen aufgebaut:

a) Jede Primformel ist eine Formel.

b) Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Formeln, so ist auch $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ eine Formel (die *Disjunktion*: „$\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$").

c) Ist $\mathfrak{A}$ eine Formel, so auch $\overline{\mathfrak{A}}$ (die *Negation*: „nicht $\mathfrak{A}$").

d) Ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ eine Formel, welche die gebundene Zahlvariable x nicht enthält, so ist auch $(x)\,\mathfrak{A}(x)$ eine Formel („Für alle x gilt $\mathfrak{A}(x)$")[14]).

Als Mitteilungszeichen für Formeln dienen große deutsche Buchstaben, für Terme kleine deutsche Buchstaben.

Die speziellen Terme $0, 0', 0'', \ldots$, welche das Strichsymbol als einziges Funktionszeichen enthalten, werden als „*Ziffern*" bezeichnet.

Für die im Kodifikat zugelassenen Funktionen soll ein allgemeines *Berechnungsverfahren* vorliegen, so daß zu jeder Ziffernbesetzung der Funktions-Argumentstellen eindeutig eine Ziffer als betreffender „*Ziffernwert*" ermittelt werden kann. Durch wiederholte Einsetzungen dieser Werte läßt sich dann auch zu jedem beliebigen Term eindeutig ein Ziffernwert bestimmen.

Für die Prädikate des Kodifikats soll ein allgemeines *Entscheidungsverfahren* bezüglich einer *logischen Wertung* vorliegen, so daß zu jeder Ziffernbesetzung der Prädikaten-Argumentstellen eindeutig ein „*Wahrheitswert*"

[10]) Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie. Math. Ann. **119** (1943).

[11]) Beweistheoretische Untersuchung der verzweigten Analysis.

[12]) Bis zur ersten kritischen ε-Zahl.

[13]) Freie Zahlvariablen werden in diesem Kodifikat nicht benötigt.

[14]) Für x kann hier auch jede andere gebundene Zahlvariable stehen.

(„*richtig*“ oder „*falsch*“) ermittelt werden kann. Insbesondere habe $\mathfrak{y} = \mathfrak{z}$ den Wahrheitswert „*richtig*“, wenn die Ziffern $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ übereinstimmen, sonst den Wahrheitswert „*falsch*“. Die Wahrheitswerte lassen sich unter Berücksichtigung der Ziffernwerte der Terme in entscheidbarer Weise auf alle Primformeln übertragen. D. h. der Wahrheitswert einer Primformel $\mathfrak{P}(\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$ soll gleich dem Wahrheitswert von $\mathfrak{P}(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n)$ sein, wenn $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ die Ziffernwerte von $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ sind.

Als „*Grundformeln*“[15]) gelten

a) „*richtige*“ Primformeln,

b) Negationen von „*falschen*“ Primformeln.

Folgende „*Schlüsse*“ werden in dem Kodifikat zugelassen:

I. Umformende Schlüsse[16])

a) $$\frac{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}}$$
(Vertauschung)

b) $$\frac{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}}$$
(Zusammenziehung)

II. Aufbauende Schlüsse

a) $$\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}}$$
(Abschwächung)

b) $$\frac{\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{N} \qquad \overline{\mathfrak{B}} \vee \mathfrak{N}}{\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \vee \mathfrak{N}}$$
(Kompositionsschluß)

c) $$\frac{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{N}}{\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \vee \mathfrak{N}}$$
(Negationsschluß)

d) $$\frac{\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{t}) \vee \mathfrak{N}}{\overline{(x)\, \mathfrak{A}(x)} \vee \mathfrak{N}}$$
(Bindungsschluß)

e) $$\frac{\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) \vee \mathfrak{N} \text{ für jede Ziffer } \mathfrak{z}}{(x)\, \mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{N}}$$
(unendliche Induktion)

III. Schnitt

$$\frac{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{A} \qquad \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{N}}{\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}}$$

Die mit $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bezeichneten Formelglieder sind die „*Nebenglieder*“ (welche auch fehlen dürfen), die übrigen die „*Hauptglieder*“ der betreffenden Schlüsse. Das Hauptglied $\mathfrak{A}$ eines Schnittes ist das „*Schnittglied*“.

Als „*Grad eines Schnittes*“ bezeichnen wir die Anzahl der logischen Zeichen, welche in der Negation $\overline{\mathfrak{A}}$ des Schnittgliedes auftreten. Der Grad eines Schnittes ist also mindestens 1.

Unter einer „*Herleitung*“ der Formel $\mathfrak{C}$ verstehen wir eine konstruktiv aufgebaute (evtl. unendliche) Figur von Formeln der Art, daß am unteren Ende der Figur die Formel $\mathfrak{C}$, an den oberen Enden nur Grundformeln stehen und der Zusammenhang übereinanderstehender Formeln immer der eines Schlußschemas ist. Die Anzahl der in einer Herleitungs-Formel auftretenden Zeichen braucht nicht beschränkt zu sein, sondern kann innerhalb der Herleitung über alle Grenzen wachsen. Wir setzen aber fest, daß die Grade aller Schnitte jeder einzelnen Herleitung nach oben beschränkt sind, und daß immer ein

[15]) Als Axiome anzusehen.

[16]) Die Formeln kann man zunächst etwa als nach rechts geklammert auffassen. Aus dem Vertauschungs-Schlußschema folgt dann nicht nur die Kommutativität, sondern auch die Assoziativität. Aus $\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$ ergibt sich nämlich durch Vertauschung (bei fehlendem Nebenglied $\mathfrak{N}$) $\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{C} \vee \mathfrak{B})$, weiter (bei fehlendem Nebenglied $\mathfrak{M}$) $\mathfrak{C} \vee (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ und (bei fehlenden Nebengliedern $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$) $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{C}$. Sieht man von den Vertauschungsschlüssen ab, so kann man die Formeln allgemein als unabhängig von der Reihenfolge ihrer Disjunktionsglieder ansehen und die entsprechenden Klammern fortlassen.

endlicher Maximalgrad aller Schnitte der Herleitung feststellbar ist[17]). Diesen bezeichnen wir als den „*Grad der Herleitung*“, falls überhaupt Schnitte darin vorkommen. Enthält eine Herleitung keine Schnitte, so soll sie den Grad Null haben.

An die Herleitungen stellen wir noch die Forderung, daß jeder Herleitungs-Formel eine Ordnungszahl der I. oder II. Zahlklasse zugeordnet werden kann. Die hierdurch bestimmte „*Ordnung einer Formel*“, welche von ihrer Stellung in der Herleitung abhängt, soll nur an folgende Bedingungen gebunden sein:

1. Bei *umformenden Schlüssen* haben Oberformel und Unterformel gleiche Ordnung.

2. Bei *aufbauenden Schlüssen* und *Schnitten* hat jede Oberformel eine kleinere Ordnung als die Unterformel.

Als „*Ordnung einer Herleitung*“ gilt die Ordnung ihrer Endformel[18]).

Innerhalb eines Herleitungsfadens nehmen die Ordnungen der Formeln von der Endformel aus über jeden nicht umformenden Schluß nach oben ab. Da eine abnehmende Folge von Ordnungszahlen immer endlich ist, treten in jedem Herleitungsfaden nur endlich viele nicht umformende Schlüsse auf. Es ist klar, daß auch die dazwischen liegenden umformenden Schlüsse nur in endlicher Anzahl verwendet zu werden brauchen. Jeder einzelne Herleitungsfaden hat dann eine endliche Länge. Aber diese Längen brauchen innerhalb einer Herleitung nicht beschränkt zu sein.

Durch eine obere Beschränkung der zugelassenen Ordnungszahlen wird die Anwendung der unendlichen Induktion in bestimmter Weise eingeengt. Hierdurch lassen sich, allerdings unter Verzicht auf ω-Vollständigkeit, gewisse Teilbereiche der Zahlentheorie abgrenzen.

Das Kodifikat enthält die vollständige Prädikatenlogik. Die hier fehlenden logischen Verknüpfungen der Konjunktion, Implikation, Äquivalenz und Existenz lassen sich explizit definieren durch

$$\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \equiv \overline{\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}}, \qquad \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \equiv \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \equiv \overline{\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}} \vee \overline{\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \vee \overline{\mathfrak{B}}}$$

$$(E\,x)\,\mathfrak{A}(x) \equiv \overline{(x)}\,\overline{\mathfrak{A}}(x)\,.$$

Alle prädikatenlogisch gültigen Formeln sind nun leicht mit den Schlußschematen des Kodifikats aus Formeln der Gestalt $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{A}$ schnittfrei herleitbar. Jede Formel $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{A}$, in der $\mathfrak{A}$ höchstens n logische Zeichen enthält, ist aber bereits mit der Ordnung $2\,n + 1$ schnittfrei herleitbar.

Wir beweisen diese letzte Behauptung durch Induktion nach n.

1. Ist $n = 0$, also $\mathfrak{A}$ eine Primformel, so ist $\mathfrak{A}$ entweder „*richtig*“ oder „*falsch*“. Dann stellt entweder $\mathfrak{A}$ oder $\overline{\mathfrak{A}}$ eine Grundformel dar, aus der in jedem Falle durch Abschwächung $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{A}$ mit der Ordnung 1 herleitbar ist.

2. Es sei $n > 0$, und die Behauptung möge für Formeln mit weniger als n logischen Zeichen gelten. $\mathfrak{A}$ hat als Nicht-Primformel eine der Gestalten

[17]) Bei dieser Beschränkung bleibt die vollständige Induktion noch in voller Allgemeinheit herleitbar, und es ist, wie in § 6 gezeigt wird, die sog. „reine Zahlentheorie“ in dem Kodifikat enthalten.

[18]) Hiernach können auch unendliche Herleitungen eine endliche Ordnung haben, wenn nämlich bei den darin auftretenden unendlichen Induktionen die Oberformeln immer beschränkte endliche Ordnungen besitzen. Gehört zu den Oberformeln einer unendlichen Induktion eine ansteigende Folge von Ordnungen, so kann als Ordnung der Unterformel die entsprechende Limeszahl genommen werden. Es kann stattdessen aber auch jede größere Ordnungszahl gewählt werden, da die Ordnungsbedingungen nur untere Grenzen für die Ordnungen festlegen.

$$\text{a) } \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \qquad \text{b) } \overline{\overline{\mathfrak{B}}} \qquad \text{c) } (x)\,\mathfrak{C}(x)\,.$$

Dabei enthalten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}(\mathfrak{z})$ weniger als n logische Zeichen. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Herleitungen für

$$\overline{\mathfrak{A}}_1 \vee \mathfrak{A}_1,\ \overline{\mathfrak{A}}_2 \vee \mathfrak{A}_2,\ \overline{\mathfrak{B}} \vee \mathfrak{B},\ \overline{\mathfrak{C}}(\mathfrak{z}) \vee \mathfrak{C}(\mathfrak{z}) \text{ für alle Ziffern } \mathfrak{z}$$

mit Ordnungen $\leq 2(n-1)+1 = 2n-1$.

Im Falle a) erhalten wir durch Abschwächungen $\overline{\mathfrak{A}}_1 \vee \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$, $\overline{\mathfrak{A}}_2 \vee \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$ und durch Kompositionsschluß $\overline{\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2} \vee \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$ mit einer Ordnung $\leq (2n-1)+2 = 2n+1$.

Im Falle b) erhalten wir durch einen Negationsschluß $\overline{\mathfrak{B}} \vee \overline{\overline{\mathfrak{B}}}$, d. h. (nach Vertauschung) $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{A}$ mit einer Ordnung $\leq 2n$.

Im Falle c) sind die Formeln $\overline{\mathfrak{C}}(\mathfrak{z}) \vee \mathfrak{C}(\mathfrak{z})$ für alle Ziffern $\mathfrak{z}$ mit Ordnungen $\leq 2n-1$ herleitbar, woraus durch Bindungsschluß $\overline{(x)\,\mathfrak{C}(x)} \vee \mathfrak{C}(\mathfrak{z})$ und durch unendliche Induktion $\overline{(x)\,\mathfrak{C}(x)} \vee (x)\,\mathfrak{C}(x)$ mit einer Ordnung $\leq (2n-1)+2 = 2n+1$ herleitbar ist.

Damit ist gezeigt, daß alle Formeln $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{A}$ mit endlichen Ordnungen schnittfrei hergeleitet werden können. Hiernach lassen sich auch alle sonstigen prädikatenlogisch gültigen Formeln mit endlichen Ordnungen schnittfrei herleiten.

§ 2. Herleitungs-Umwandlungen.

Wir stellen zunächst fest, daß eine Herleitung der Formel $\mathfrak{A}(\mathfrak{s})$ ohne Ordnungs- oder Gradänderung in eine Herleitung von $\mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ umgewandelt werden kann, wenn die Terme $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ gleichen Ziffernwert haben. Diese Umwandlung geschieht, indem alle mit dem Term $\mathfrak{s}$ der Endformel in deduktivem Zusammenhang stehenden gleichlautenden Terme aller Herleitungs-Formeln durch $\mathfrak{t}$ ersetzt werden. Dadurch gehen die Grundformeln wiederum in Grundformeln über[19]), und der Herleitungszusammenhang bleibt gewahrt. Diese Umwandlung bezeichnen wir als „*Term-Umsetzung*".

Man erkennt nun, daß alle Formeln

$$\mathfrak{s} \neq \mathfrak{t} \vee \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{s}) \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{t})$$

mit endlichen Ordnungen schnittfrei herleitbar sind. Haben nämlich die Terme $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ verschiedene Ziffernwerte, so ist $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}$ „*falsch*", und die Negation $\mathfrak{s} \neq \mathfrak{t}$ (Abkürzung für $\overline{\mathfrak{s} = \mathfrak{t}}$) stellt eine Grundformel dar. Aus dieser erhält man durch Abschwächung

$$\mathfrak{s} \neq \mathfrak{t} \vee \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{s}) \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{t})$$

mit der Ordnung 1. Haben $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$ den gleichen Ziffernwert $\mathfrak{z}$, so ist $\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{z}) \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ mit endlicher Ordnung herleitbar, nach Term-Umsetzungen auch $\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{s}) \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{t})$ und nach einer Abschwächung auch

$$\mathfrak{s} \neq \mathfrak{t} \vee \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{s}) \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{t})\,.$$

Ferner ist zu bemerken, daß außer den umformenden Schlußschematen auch die *Kompositionsschlüsse*, *Negationsschlüsse* und *unendlichen Induktionen* in der Weise „*umkehrbar*" sind, daß aus der Herleitung einer Formel, welche

[19]) Bei der Feststellung, ob es sich bei einer Formel um eine Grundformel handelt, kommt es ja nur auf die Ziffernwerte der darin enthaltenen Terme an.

die Gestalt einer Unterformel eines solchen Schlußschemas besitzt, eine Herleitung für jede entsprechende Oberformel zu gewinnen ist.

Um den Beweis für das Kompositions-Schlußschema durchzuführen, nehmen wir an, es sei eine Herleitung für die Formel

$$\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \vee \mathfrak{N}$$

gegeben. Zu dem „*Formelbund*" von $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$ rechnen wir alle gleichlautenden Formelglieder, welche in der Herleitung mit dem betreffenden Glied der Endformel in deduktivem Zusammenhang stehen. Man erhält den Formelbund, indem man das Glied $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$ in der Herleitung von der Endformel aus durch alle umformenden Schlüsse hindurch und durch diejenigen übrigen Schlüsse, in denen es im Nebenglied auftritt, nach oben verfolgt[20]). Die obersten Glieder dieses Formelbundes gehören entweder zu Hauptgliedern von Abschwächungen oder sind Hauptglieder in den Unterformeln von Kompositionsschlüssen. In Grundformeln können sie nicht auftreten, da diese nur aus Primformeln und negierten Primformeln bestehen.

Ersetzen wir in der Herleitung alle Glieder des Formelbundes durch $\overline{\mathfrak{A}}$, so fallen die obersten Kompositionsschlüsse fort, während sonst der Herleitungszusammenhang gewahrt bleibt. Es werden ja hierbei außer umformenden Schlüssen und Abschwächungen, welche aber bei der Änderung ihren Charakter als umformende Schlüsse bzw. Abschwächungen beibehalten, nur Nebenglieder geändert. Man gewinnt so eine Herleitung von $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{N}$, deren Ordnung und Grad gegenüber der ursprünglichen Herleitung nicht zugenommen haben.

Ebenso ist eine Herleitung von $\overline{\mathfrak{B}} \vee \mathfrak{N}$ zu erhalten, und entsprechend ist die Umkehrbarkeit der Negationsschlüsse und unendlichen Induktionen einzusehen. Im letzten Falle treten die obersten Glieder des zu betrachtenden Formelbundes von $(x)\,\mathfrak{A}(x)$ außer in Hauptgliedern von Abschwächungen als Hauptglieder von unendlichen Induktionen auf. Hier ist jedesmal die Oberformel mit der Ziffer $\mathfrak{z}$, für welche die Umkehrung der unendlichen Induktion durchgeführt werden soll, festzuhalten, während die übrigen Oberformeln zu streichen sind.

Die „*Umkehrbarkeit der Schlußschemata*" besteht also in folgender Weise: Aus Herleitungen der Formeln

$$\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \vee \mathfrak{N} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\overline{\mathfrak{A}}} \vee \mathfrak{N} \quad \text{bzw.} \quad (x)\,\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{N}$$

lassen sich (durch Formel-Ersetzungen und Streichungen von Herleitungsteilen) Herleitungen mit nicht größeren Ordnungen und Graden für die Formeln

$$\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{N} \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{B}} \vee \mathfrak{N} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{A} \vee \mathfrak{N} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{z}) \vee \mathfrak{N}$$

(letztere mit beliebiger Ziffer $\mathfrak{z}$) gewinnen.

§ 3. Eliminierbarkeit der Schnitte.

Durch Induktion nach dem Herleitungsgrad ergibt sich die Eliminierbarkeit der Schnitte aus dem

Reduktionssatz: Eine Herleitung von nicht verschwindendem Grad und der Ordnung α läßt sich auf eine Herleitung von kleinerem Grad und der Ordnung 2^{α} reduzieren.

[20]) Es können zwei verschiedene Arten von Verzweigungen auftreten, und zwar Verzweigungen in verschiedene Herleitungsfäden (an Kompositionsschlüssen) und Verzweigungen innerhalb der Formeln (an Zusammenziehungen).

Hierbei ist 2^α die übliche mengentheoretische Potenz von Ordnungszahlen. Wir beweisen den Reduktionssatz durch transfinite Induktion nach der Ordnung α.

Für die Herleitungen der Ordnung 0 ist der Satz gegenstandslos, da diese keine Schnitte enthalten können, also den Grad 0 haben. Wir können demnach als Induktionsvoraussetzung annehmen, daß an jeder Herleitung von kleinerer Ordnung als α eine Reduktion des Grades durchgeführt werden kann.

Ist der letzte über der Endformel (der Ordnung α) stehende nicht umformende Schluß ein aufbauender Schluß, so hat jede Oberformel desselben eine Ordnung α_i, die kleiner als α ist. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für diese Oberformeln reduzierte Herleitungen der Ordnungen 2^{α_i}. Wir setzen alle diese reduzierten Herleitungen unter Anfügung der letzten Schlüsse zusammen. Dabei können wir den Formeln unter dem letzten aufbauenden Schluß die Ordnung 2^α, welche ja größer als 2^{α_i} ist, erteilen. So erhalten wir eine gewünschte reduzierte Herleitung.

Es bleibt der Fall, daß der letzte nicht umformende Schluß ein Schnitt

$$(\Sigma) \quad \frac{\mathfrak{R} \vee \mathfrak{S} \qquad \overline{\mathfrak{S}} \vee \mathfrak{T}}{\mathfrak{R} \vee \mathfrak{T}}$$

ist. Auch hier sind die Ordnungen α_1, α_2 der Oberformeln kleiner als die Ordnung α der Unterformel. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es reduzierte Herleitungen für die Oberformeln mit den Ordnungen 2^{α_1} bzw. 2^{α_2}. Für das Schnittglied $\mathfrak{S}$ sind folgende Fälle möglich:

I. $\mathfrak{S}$ ist eine Primformel,
II. $\mathfrak{S}$ hat die Form $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$,
III. $\mathfrak{S}$ hat die Form $\overline{\mathfrak{A}}$,
IV. $\mathfrak{S}$ hat die Form $(x)\,\mathfrak{A}(x)$.

Wir eliminieren den Schnitt (Σ) in den einzelnen Fällen in verschiedener Weise.

I. Fall. Hier ist eine der beiden Formeln $\mathfrak{S}$, $\overline{\mathfrak{S}}$ eine Grundformel, die andere keine Grundformel. Wir betrachten die reduzierte Herleitung derjenigen Oberformel, welche die Nicht-Grundformel enthält. Die obersten Glieder des Formelbundes der Nicht-Grundformel können nur in Hauptgliedern von Abschwächungen auftreten. Den übrigen aufbauenden Schlüssen und Schnitten gehört der Formelbund nur in Nebengliedern an. Streichen wir den ganzen Formelbund, so bleibt der Herleitungszusammenhang gewahrt, wobei nur evtl. Abschwächungen und umformende Schlüsse fortfallen. Wir gewinnen dadurch eine reduzierte Herleitung von $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{T}$, woraus durch eine Abschwächung $\mathfrak{R} \vee \mathfrak{T}$ mit der Ordnung 2^α zu erhalten ist.

II. Fall. Aus der reduzierten Herleitung (von der Ordnung 2^{α_2}) der rechten Oberformel

$$\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \vee \mathfrak{T}$$

bilden wir auf Grund der Umkehrbarkeit des Kompositionsschlußschemas reduzierte Herleitungen (gleicher Ordnung) für die Formeln

$$\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{T}, \ \overline{\mathfrak{B}} \vee \mathfrak{T}.$$

Diese setzen wir mit der reduzierten Herleitung (von der Ordnung 2^{α_1}) der linken Oberformel zusammen zur Herleitung

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{R}\vee\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\qquad\overline{\mathfrak{B}}\vee\mathfrak{T}}{\mathfrak{R}\vee\mathfrak{A}\vee\mathfrak{T}}\ \text{(Schnitt)}}{\mathfrak{R}\vee\mathfrak{T}\vee\mathfrak{A}}\ \text{(Vertauschung)}\qquad\overline{\mathfrak{A}}\vee\mathfrak{T}}{\mathfrak{R}\vee\mathfrak{T}\vee\mathfrak{T}}\ \text{(Schnitt)}}{\mathfrak{R}\vee\mathfrak{T}}\ \text{(umformende Schlüsse).}$$

Die neue Herleitung hat einen kleineren Grad als die ursprüngliche. Bei den Ordnungen ist zu beachten, daß die Formel $\overline{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}\vee\mathfrak{T}$ nicht von der Ordnung 0 herleitbar sein kann, so daß $\alpha_2 \geqq 1$ ist. Wir können nun als Ordnung von $\mathfrak{R}\vee\mathfrak{A}\vee\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{R}\vee\mathfrak{T}\vee\mathfrak{A}$ die Zahl $max\,(2^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}) + 1$ nehmen. Diese ist größer als die Ordnungen der zugehörigen Oberformeln und kleiner als

$$max\,(2^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}) + 2^{\alpha_2} \leqq 2^{max\,(\alpha_1,\alpha_2)+1} \leqq 2^{\alpha}\,.$$

Folglich kann 2^{α} als Ordnung der Endformel genommen werden.

III. Fall. Auf Grund der Umkehrbarkeit des Negationsschlußschemas bilden wir aus der reduzierten Herleitung der rechten Oberformel $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}\vee\mathfrak{T}$ eine reduzierte Herleitung von $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{T}$. In Verbindung mit der reduzierten Herleitung der linken Oberformel $\mathfrak{R}\vee\overline{\mathfrak{A}}$ bilden wir nun die Herleitung

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}\vee\mathfrak{A}}\qquad\dfrac{\mathfrak{R}\vee\overline{\mathfrak{A}}}{\overline{\mathfrak{A}}\vee\mathfrak{R}}\ \text{(Vertauschungen)}}{\mathfrak{T}\vee\mathfrak{R}}\ \text{(Schnitt)}}{\mathfrak{R}\vee\mathfrak{T}}\ \text{(Vertauschung)}\,.$$

Auch hier ist der Grad der Herleitung geringer geworden, und der Endformel kann die Ordnung 2^{α} erteilt werden.

IV. Fall. Wir betrachten in der reduzierten Herleitung der rechten Oberformel

$$\overline{(x)}\,\mathfrak{A}(x)\vee\mathfrak{T}$$

den Formelbund von $\overline{(x)}\,\mathfrak{A}(x)$. Die obersten Glieder desselben treten entweder in Hauptgliedern von Abschwächungen auf, oder sie sind Hauptglieder in Unterformeln

$$\overline{(x)}\,\mathfrak{A}(x)\vee\mathfrak{N}_i$$

von Bindungsschlüssen mit den Oberformeln

$$\overline{\mathfrak{A}}\,(\mathfrak{t}_i)\vee\mathfrak{N}_i\,.$$

Wir bilden auf Grund der Umkehrbarkeit der unendlichen Induktion und durch Term-Umsetzungen aus der reduzierten Herleitung der linken Oberformel

$$\mathfrak{R}\vee(x)\,\mathfrak{A}(x)$$

reduzierte Herleitungen für

$$\mathfrak{R}\vee\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_i)$$

der Ordnung 2^{α_1}. Sodann ersetzen wir jeden Bindungsschluß, der zu einem obersten Gliede des betrachteten Formelbundes gehört, durch den Schnitt

$$\dfrac{\mathfrak{R}\vee\mathfrak{A}(\mathfrak{t}_i)\qquad\overline{\mathfrak{A}}\,(\mathfrak{t}_i)\vee\mathfrak{N}_i}{\mathfrak{R}\vee\mathfrak{N}_i}\,.$$

Wird ferner in der ganzen reduzierten Herleitung der rechten Oberformel jedes Glied des Formelbundes von $\overline{(x)}\,\mathfrak{A}(x)$ durch $\mathfrak{R}$ ersetzt, so bleibt der Herleitungszusammenhang gewahrt. Die rechte Oberformel geht dadurch in

$\mathfrak{R} \vee \mathfrak{T}$ über, und wir erhalten so eine Herleitung mit vermindertem Grad. Die Ordnung β einer jeden ursprünglichen Herleitungsformel ersetzen wir durch die Ordnung $2^{\alpha_1} + \beta$ (im Sinne der mengentheoretischen Summe). Hat bei einem fortgefallenen Bindungsschluß die Oberformel ursprünglich die Ordnung β und die ursprüngliche Unterformel die Ordnung γ (größer als β), so ist die Ordnung $2^{\alpha_1} + \gamma$ der Unterformel des ersetzenden Schnittes größer als die Ordnung 2^{α_1} seiner linken Oberformel und als die Ordnung $2^{\alpha_1} + \beta$ seiner rechten Oberformel. Die Ordnungsbedingungen sind also bei dem ersetzenden Schnitt erfüllt, aber auch an allen anderen Stellen, da aus $\beta < \gamma$ stets $2^{\alpha_1} + \beta < 2^{\alpha_1} + \gamma$ folgt. Durch die Ersetzungen geht die rechte Oberformel in $\mathfrak{R} \vee \mathfrak{T}$ über. Ihre Ordnung wird

$$2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} \leq 2^{max(\alpha_1, \alpha_2)+1} \leq 2^{\alpha} .$$

Sie kann, wenn sie kleiner als 2^{α} ist, unterhalb des letzten nicht umformenden Schlusses auf 2^{α} erhöht werden.

Damit ist der Reduktionssatz, aus dem die Eliminierbarkeit der Schnitte und die Widerspruchsfreiheit[21]) des Kodifikats folgt, durch transfinite Induktion bewiesen. Wie weit diese transfinite Induktion zu erstrecken ist, hängt von den zugelassenen Ordnungszahlen ab.

Bei der Elimination der Schnitte nimmt die Ordnung einer Herleitung nach dem Reduktionssatz zu, und zwar schrittweise auf

$$2^{\alpha}, 2^{2^{\alpha}}, \ldots$$

Die schnittfreie Herleitung hat schließlich eine Ordnung, welche im Falle $2^{\alpha} = \alpha$ gleich α, sonst kleiner als die erste auf α folgende Zahl ε mit $2^{\varepsilon} = \varepsilon$ ist. Die Zahlen dieser Eigenschaft sind außer ω die sog. ε-Zahlen.

Damit haben wir den

Eliminationssatz: Eine Herleitung der Ordnung α läßt sich durch eine schnittfreie Herleitung ersetzen, deren Ordnung

a) *kleiner als die nächste auf α folgende ε-Zahl (bzw. ω) ist,*

b) *unverändert bleibt, falls α eine ε-Zahl oder ω ist.*

§ 4. Herleitungen der transfiniten Induktion.

Wir beschränken uns auf ein Anfangsstück der II. Zahlklasse, in welchem die Ordnungszahlen finit charakterisierbar sind[22]) und sich umkehrbar eindeutig so auf die Ziffern des Kodifikats abbilden lassen, daß nach einem allgemeinen Entscheidungsverfahren immer feststellbar ist, welcher Ziffer eine bestimmte Ordnungszahl zugeordnet ist[23]). Zufolge der gedachten Abbildung

[21]) Wäre das Kodifikat widerspruchsvoll, so müßte jede Formel herleitbar sein. Das ist nicht der Fall, da insbesondere die Formeln der Gestalt $\mathfrak{P} \vee \cdots \vee \mathfrak{P}$ mit einer „falschen" Primformel $\mathfrak{P}$ nicht herleitbar sind. Diese Formeln könnten nämlich nur als Unterformeln von umformenden Schlüssen und Abschwächungen auftreten. Dann hätte in jedem Falle auch die zugehörige Oberformel die Gestalt $\mathfrak{P} \vee \cdots \vee \mathfrak{P}$. Eine Herleitung hierfür wäre nur möglich, wenn auch alle Grundformeln der Herleitung von der Gestalt $\mathfrak{P} \vee \cdots \vee \mathfrak{P}$ wären. Aber solche Grundformeln gibt es nicht.

[22]) Eine solche finite Charakterisierung wird in einer folgenden Arbeit gegeben: Beweistheoretische Untersuchung der verzweigten Analysis.

[23]) Derartige Abbildungen im einzelnen anzugeben, bereitet keine Schwierigkeiten, wenn eine finite Charakterisierung der betreffenden Ordnungszahlen vorliegt. Wir wollen uns aber hier mit der Tatsache der Abbildbarkeit begnügen und statt der entsprechenden Ziffern immer die Ordnungszahlen selbst ins Auge fassen.

entspricht der Beziehung $\alpha < \beta$ ein Prädikat mit zwei Argumentstellen, zu dem eine entscheidbare logische Wertung für alle Ziffern-Argumente gehört. Ebenso entsprechen den mengentheoretischen Funktionen $\alpha + \beta$, α^β gewisse Funktionen zwischen Ziffern mit berechenbaren Ziffernwerten, sofern das betrachtete Anfangsstück der II. Zahlklasse gegenüber diesen Funktionen abgeschlossen ist, was wir hier annehmen wollen[24]).

Die Abbildung möge der Ordnungszahl 0 die Ziffer 0 zuordnen. Die den Ordnungszahlen 1, 2, 3, ..., ω zugeordneten Ziffern wollen wir ebenfalls mit 1, 2, 3, ..., ω bezeichnen. Dabei ist zu beachten, daß 1, 2, ... nicht die Ziffern $0'$, $0''$, ... sind. Die den mengentheoretischen Funktionen $\alpha + \beta$, α^β und der Beziehung $\alpha < \beta$ entsprechenden Funktionen bzw. das entsprechende Prädikat des Kodifikats bezeichnen wir ebenfalls mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}^\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$. Es ist zu beachten, daß dann $\mathfrak{a} + 1$ und $\mathfrak{a}'$ verschiedene Funktionen sind.

Mit endlichen Ordnungen herleitbar sind die Formeln

(1a) $\quad \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{A}$

(1b) $\quad \mathfrak{z} \neq \mathfrak{y} \vee \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{y}) \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$

(2a) $\quad \overline{\mathfrak{z} < 0}$

(2b) $\quad \overline{\mathfrak{z} < \mathfrak{y} + 1} \vee \mathfrak{z} < \mathfrak{y} \vee \mathfrak{z} = \mathfrak{y}$

(2c) $\quad \overline{\mathfrak{x} < \mathfrak{y}} \vee \overline{\mathfrak{y} < \mathfrak{z}} \vee \mathfrak{x} < \mathfrak{z}$

und alle bekannten mengentheoretischen Beziehungen für Summe und Potenz.

Wir nehmen noch einige berechenbare Funktionen als in unserem Kodifikat vorhanden an, und zwar eine Funktion $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ mit den herleitbaren Formeln

(3a) $$\overline{\mathfrak{x} < \mathfrak{y} + 2^\mathfrak{z}} \vee \mathfrak{x} < \mathfrak{y} + 2^{\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) + 1},$$

(3b) $$\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) < \mathfrak{z} \vee \mathfrak{z} = 0,$$

ferner die Funktion $\psi(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, welche rekursiv charakterisiert ist durch

(4a) $$\psi(0, \mathfrak{z}) = \mathfrak{z},$$

(4b) $$\psi(\mathfrak{y}', \mathfrak{z}) = 2^{\psi(\mathfrak{y}, \mathfrak{z})}.$$

Die Funktion $\varepsilon(\mathfrak{z})$ soll für das Argument 0 den Wert 0 haben, sonst die erste ε-Zahl (einschl. ω) $\geqq \mathfrak{z}$ darstellen. Für diese brauchen wir die Formeln

(5a) $$\mathfrak{z} < \varepsilon(\mathfrak{z} + 1),$$

(5b) $$\overline{\mathfrak{z} < \mathfrak{a}} \vee \varepsilon(\mathfrak{z} + 1) < \mathfrak{a},$$

falls $\mathfrak{a}$ einer Limeszahl aus der Menge der betrachteten ε-Zahlen entspricht. Schließlich möge es noch eine Funktion $\chi(\mathfrak{z})$ geben mit

(6) $$\overline{\mathfrak{y} < \varepsilon(\mathfrak{z})} \vee \mathfrak{y} < \psi(\chi(\mathfrak{y}), \mathfrak{z}).$$

Die Existenz dieser Funktionen läßt sich mengentheoretisch einsehen. Ihre genaue finite Beschreibung mit einem Berechnungsverfahren für alle Ziffernwerte, auf das es hier ja ankommt, kann erst nach einer finiten Erklärung der entsprechenden Ordnungszahlen gegeben werden. Es wird für ein Anfangsstück der II. Zahlklasse später nachgeholt [vgl. Anm.[22])]. Voraussetzung für die Bildung der Funktion $\varepsilon(\mathfrak{z})$ ist, daß der betrachtete Ordnungszahlen-Bereich bis ausschließlich zu einer Limeszahl aus der Menge der ε-Zahlen reicht.

[24]) D. h. das Anfangsstück soll mit α, β auch immer noch $\alpha + \beta$ und α^β enthalten.

Auf Grund der angenommenen Berechenbarkeit der Funktionen sind die Formeln (2a) bis (6) entweder Grundformeln oder aus Grundformeln durch Abschwächungen herleitbar. Die Herleitungen von (1a), (1b) sind je nach den darin enthaltenen Formeln $\mathfrak{A}$ wesentlich umfangreicher, haben aber immer endliche Ordnungen und benötigen keine Schnitte.

Als „*transfinite Induktion*“ bezeichnen wir die Formel, welche die entsprechende Aussage für die abgebildeten Ordnungszahlen repräsentiert. Zur Abkürzung sei

$$\mathfrak{A}^*(\mathfrak{t}) \equiv (y)\,[\overline{y < \mathfrak{t}} \vee \mathfrak{A}(y)]\,,$$

$$\mathfrak{P}_x(\mathfrak{A}(x)) \equiv (x)\,[\overline{\mathfrak{A}^*}(x) \vee \mathfrak{A}(x)]\,.$$

Dann drückt die Formel

$$\mathfrak{J}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{z}) \equiv \overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \mathfrak{A}^*(\mathfrak{z})$$

die „*transfinite Induktion bis* $\mathfrak{z}$“ für die Formel $\mathfrak{A}$ aus.

Über die Herleitbarkeit der transfiniten Induktion lassen sich folgende Sätze aufstellen.

Satz I. Die Formeln $\mathfrak{J}_x(\mathfrak{A}(\mathfrak{x}), 0)$ sind mit der Ordnung 3 herleitbar.

Beweis: Aus den Grundformeln (2a) folgt durch Abschwächung

$$\overline{\mathfrak{z} < 0} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$$

mit der Ordnung 1, weiter durch unendliche Induktion

$$[1] \qquad \mathfrak{A}^*(0)$$

mit der Ordnung 2 und durch weitere Abschwächung

$$\mathfrak{J}_x(\mathfrak{A}(x), 0)$$

mit der Ordnung 3.

Satz II. Aus einer Herleitung von $\mathfrak{J}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{a})$ ist unter endlicher Ordnungserhöhung eine Herleitung von $\mathfrak{J}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{a}+1)$ zu erhalten.

Beweis: Durch Schnitt von (1b) und (2b) ergibt sich

$$\overline{\mathfrak{z} < \mathfrak{a} + 1} \vee \mathfrak{z} < \mathfrak{a} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{a}) \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z}),$$

weiter mit Formel (1a) und Schlüssen IIa, b,c

$$\overline{\overline{\mathfrak{z} < \mathfrak{a}} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z})} \vee \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{a}) \vee \overline{\mathfrak{z} < \mathfrak{a} + 1} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$$

nach IId:
$$\overline{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{a}) \vee \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{a}) \vee \overline{\mathfrak{z} < \mathfrak{a} + 1} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$$

nach IIe:
$$\overline{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{a}) \vee \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{a}) \vee \mathfrak{A}^*(\mathfrak{a} + 1)$$

nach (1a), IIa, b, c:
$$\overline{\mathfrak{A}^*(\mathfrak{a}) \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{a})} \vee \overline{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{a}) \vee \mathfrak{A}^*(\mathfrak{a} + 1)$$

nach IId: [2]
$$\overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \overline{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{a}) \vee \mathfrak{A}^*(\mathfrak{a} + 1)$$

nach (1a), IIa, b, c:
$$\overline{\overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \mathfrak{A}^*(\mathfrak{a})} \vee \overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \mathfrak{A}^*(\mathfrak{a} + 1)$$

d. h.
$$\overline{\mathfrak{J}_x}(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{a}) \vee \mathfrak{J}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{a} + 1).$$

Diese Herleitung endlicher Ordnung ergibt durch Schnitt mit der Herleitung von $\mathfrak{J}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{a})$ die Formel $\mathfrak{J}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{a} + 1)$. Dabei findet höchstens eine endliche Ordnungserhöhung gegenüber der gegebenen Herleitung statt.

Satz III. Sind für eine bestimmte Ziffer $\mathfrak{a}$ alle Formeln $\mathfrak{J}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{a})$ mit Ordnungen $< \alpha + \omega$ herleitbar, so auch alle Formeln $\mathfrak{J}_x(\mathfrak{A}(x), 2^{\mathfrak{a}})$.

Beweis[25]): Es sei zur Abkürzung

$$\mathfrak{B}_y(\mathfrak{A}(y), \mathfrak{t}) \equiv (x)\,[\mathfrak{A}^*(x) \vee \mathfrak{A}^*(x + 2^{\mathfrak{t}})].$$

Aus Formeln (1a), (3a) und Schlüssen IIa, b, c folgt

$$\overline{\overline{\mathfrak{x} < \mathfrak{y} + 2^{\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) + 1}} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{x})} \vee \overline{\mathfrak{x} < \mathfrak{y} + 2^{\mathfrak{z}}} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$$

nach IId: $\overline{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{y} + 2^{\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) + 1}) \vee \overline{\mathfrak{x} < \mathfrak{y} + 2^{\mathfrak{z}}} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$

nach (1a), IIa, b, c:

$$\overline{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{y} + 2^{\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})}) \vee \overline{\overline{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{y} + 2^{\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})}) \vee \mathfrak{A}^*(\mathfrak{y} + 2^{\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) + 1})} \vee \overline{\mathfrak{x} < \mathfrak{y} + 2^{\mathfrak{z}}} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$$

nach IId: $\overline{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{y} + 2^{\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})}) \vee \overline{\mathfrak{B}_y}(\mathfrak{A}(y), \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})) \vee \overline{\mathfrak{x} < \mathfrak{y} + 2^{\mathfrak{z}}} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$

nach (1a), IIa, b, c:

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{y}) \vee \mathfrak{A}^*(\mathfrak{y} + 2^{\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})})} \vee \overline{\mathfrak{B}_y}(\mathfrak{A}(y)\, \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})) \vee \overline{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{y}) \vee \overline{\mathfrak{x} < \mathfrak{y} + 2^{\mathfrak{z}}} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$$

nach IId, Ib: $\overline{\mathfrak{B}_y}(\mathfrak{A}(y), \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})) \vee \overline{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{y}) \vee \overline{\mathfrak{x} < \mathfrak{y} + 2^{\mathfrak{z}}} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$

nach (3b), IIa, b, c:

$$\overline{\overline{\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) < \mathfrak{z}} \vee \mathfrak{B}_y(\mathfrak{A}(y), \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}))} \vee \overline{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{y}) \vee \overline{\mathfrak{x} < \mathfrak{y} + 2^{\mathfrak{z}}} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \vee \mathfrak{z} = 0$$

nach IId: $\overline{\mathfrak{B}^*_y}(\mathfrak{A}(y), \mathfrak{z}) \vee \overline{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{y}) \vee \overline{\mathfrak{x} < \mathfrak{y} + 2^{\mathfrak{z}}} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \vee \mathfrak{z} = 0$

nach IIe: $\overline{\mathfrak{B}^*_y}(\mathfrak{A}(y), \mathfrak{z}) \vee \overline{\mathfrak{A}^*}(\mathfrak{y}) \vee \mathfrak{A}^*(\mathfrak{y} + 2^{\mathfrak{z}}) \vee \mathfrak{z} = 0$

nach IIe: [3] $\overline{\mathfrak{B}^*_y}(\mathfrak{A}(y), \mathfrak{z}) \vee \mathfrak{B}_y(\mathfrak{A}(y), \mathfrak{z}) \vee \mathfrak{z} = 0.$

Aus Formel [2] (im Beweis von Satz II) folgt nach IIe

$$\overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \mathfrak{B}_y(\mathfrak{A}(y), 0)$$

nach Schnitt mit (1b): $\overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \mathfrak{B}_y(\mathfrak{A}(y), \mathfrak{z}) \vee \mathfrak{z} \neq 0$

nach Schnitt mit [3]: $\overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \mathfrak{B}^*_y(\mathfrak{A}(y), \mathfrak{z}) \vee \mathfrak{B}_y(\mathfrak{A}(y), \mathfrak{z})$

nach IIe: [4] $\overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \mathfrak{P}_x(\mathfrak{B}_y(\mathfrak{A}(y), x)).$

Aus [1], (1a) folgt nach IIa, b, c

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}^*}(0) \vee \mathfrak{A}^*(2^{\mathfrak{a}})} \vee \mathfrak{A}^*(2^{\mathfrak{a}})$$

nach IId: [5] $\overline{\mathfrak{B}_y}(\mathfrak{A}(y), \mathfrak{a}) \vee \mathfrak{A}^*(2^{\mathfrak{a}}).$

Nach (1a) und IId ist

$$\overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{B}_y(\mathfrak{A}(y), x)) \vee \overline{\mathfrak{B}^*_y}(\mathfrak{A}(y), \mathfrak{a}) \vee \mathfrak{B}_y(\mathfrak{A}(y), \mathfrak{a})$$

nach Schnitt mit [4]: $\overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \overline{\mathfrak{B}^*_y}(\mathfrak{A}(y), \mathfrak{a}) \vee \mathfrak{B}_y(\mathfrak{A}(y), \mathfrak{a})$

nach Schnitt mit [5]: $\overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \overline{\mathfrak{B}^*_y}(\mathfrak{A}(y), \mathfrak{a}) \vee \mathfrak{A}^*(2^{\mathfrak{a}})$

nach [4], IIa, b, c: $\overline{\overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{B}_y(\mathfrak{A}(y), x)) \vee \mathfrak{B}^*_y(\mathfrak{A}(y), \mathfrak{a})} \vee \overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \mathfrak{A}^*(2^{\mathfrak{a}})$

d. h. $\overline{\mathfrak{J}_x}(\mathfrak{B}_y(\mathfrak{A}(y), x), \mathfrak{a}) \vee \mathfrak{J}_x(\mathfrak{A}(x), 2^{\mathfrak{a}}).$

Diese Herleitung hat endliche Ordnung. Nach Voraussetzung gibt es eine Herleitung einer Ordnung $< \alpha + \omega$ für

$$\mathfrak{J}_x(\mathfrak{B}_y(\mathfrak{A}(y), x), \mathfrak{a}).$$

[25]) Die hier angegebene Herleitung verläuft ähnlich wie eine Herleitung von GENTZEN in der unter Anm. [10]) zitierten Arbeit.

Durch Schnitt erhält man aus diesen beiden Herleitungen

$$\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), 2^{\mathfrak{a}})$$

mit einer Ordnung $< \alpha + \omega$.

Satz IV. Aus einer Herleitung von $\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{a})$ ist im Falle $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ unter endlicher Ordnungserhöhung eine Herleitung von $\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{b})$ zu erhalten.

Beweis: Aus der Herleitung von $\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{a})$ sind auf Grund der Umkehrbarkeit der unendlichen Induktion Herleitungen von

$$\overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \overline{\mathfrak{z} < \mathfrak{a}} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$$

zu gewinnen. Durch Schnitte mit den Formeln

$$\overline{\mathfrak{z} < \mathfrak{b}} \vee \mathfrak{z} < \mathfrak{a}$$

(welche durch Schnitt aus $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ mit (2c) hervorgehen) folgt

$$\overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \overline{\mathfrak{z} < \mathfrak{b}} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z}),$$

woraus durch unendliche Induktion die Formel

$$\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{b})$$

unter endlicher Ordnungserhöhung gegenüber der Ausgangsherleitung zu erhalten ist.

Satz V. Sind für eine bestimmte Ziffer $\mathfrak{a}$ alle Formeln $\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{a})$ mit Ordnungen $< \alpha + \omega$ herleitbar, so auch alle Formeln $\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{b})$, wenn $\mathfrak{b}$ kleiner als die nächste auf $\mathfrak{a}$ folgende ε-Zahl (einschl. ω) ist.

Beweis: Ist $\mathfrak{b}$ kleiner als die nächste auf $\mathfrak{a}$ folgende ε-Zahl, so $\mathfrak{b} < \varepsilon(\mathfrak{a} + 1)$ und nach (6) $\mathfrak{b} < \psi(\chi(\mathfrak{b}), \mathfrak{a} + 1)$. Ist $\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{a})$ mit Ordnungen $< \alpha + \omega$ herleitbar, so nach Satz II auch $\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{a} + 1)$ und auf Grund wiederholter Anwendungen von Satz III gemäß den Rekursionsgleichungen (4) auch $\mathfrak{I}_x\big(\mathfrak{A}(x), \psi(\chi(\mathfrak{b}), \mathfrak{a} + 1)\big)$, also nach Satz IV auch $\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{b})$.

Satz VI. Sind für eine bestimmte Ziffer $\mathfrak{a}$ alle Formeln $\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{a})$ mit Ordnungen $< \alpha + \omega$ herleitbar, so ist jede Formel $\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \varepsilon(\mathfrak{a} + 1))$ mit der Ordnung $\varepsilon(\alpha + 1)$ herleitbar.

Beweis: Unter den Voraussetzungen dieses Satzes sind nach Satz V, da $\psi(\chi(\mathfrak{z}), \mathfrak{a} + 1)$ kleiner als die nächste auf α folgende ε-Zahl ist, alle Formeln

$$\mathfrak{I}_x\big(\mathfrak{A}(x), \psi(\chi(\mathfrak{z}), \mathfrak{a} + 1)\big)$$

mit Ordnungen $< \alpha + \omega$ herleitbar, auf Grund der Umkehrbarkeit der unendlichen Induktion dann auch

$$\overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \overline{\mathfrak{z} < \psi(\chi(\mathfrak{z}), \mathfrak{a} + 1)} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z}).$$

Daraus folgt durch Schnitt mit (6)

$$[6] \quad \overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \overline{\mathfrak{z} < \varepsilon(\mathfrak{a} + 1)} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z}).$$

Alle Formeln dieser Art sind mit Ordnungen $< \alpha + \omega$ herleitbar. Wir können aber diese Herleitungen nicht ohne weiteres durch eine unendliche Induktion verbinden, da die Herleitungsgrade nicht beschränkt zu sein brauchen. Deshalb eliminieren wir hier zunächst die Schnitte, wodurch die Herleitungsordnungen anwachsen, aber nach dem Eliminationssatz kleiner als die nächste

auf α folgende ε-Zahl (bzw. ω), d. h. $< \varepsilon(\alpha + 1)$ bleiben. Die so umgewandelten Herleitungen der Formeln [6] verbinden wir durch eine unendliche Induktion zu einer Herleitung von

$$\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \varepsilon(\mathfrak{a} + 1))$$

mit der Ordnung $\varepsilon(\alpha + 1)$.

Satz VII. Für eine Ziffer $\mathfrak{a}$, deren entsprechende Ordnungszahl α eine ε-Zahl (bzw. ω) ist, sind alle Formeln $\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{a})$ schnittfrei mit der Ordnung α herleitbar.

Beweis: Ist $\alpha = \omega$, so folgt der Satz aus den Sätzen I und VI. Wir wenden nun transfinite Induktion nach α an, indem wir als Induktionsvoraussetzung annehmen, daß der Satz für alle ε-Zahlen unter α gilt.

Dann ist für jede Ziffer $\mathfrak{z}$ die Formel

$$\overline{\varepsilon(\mathfrak{z} + 1) < \mathfrak{a}} \vee \mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \varepsilon(\mathfrak{z} + 1))$$

mit einer Ordnung $< \alpha$ herleitbar. Denn entweder gilt $\overline{\varepsilon(\mathfrak{z} + 1) < \mathfrak{a}}$, oder $\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \varepsilon(\mathfrak{z} + 1))$ ist mit der Ordnung $\varepsilon(\mathfrak{z} + 1) < \alpha$ schnittfrei herleitbar. Auf Grund der Umkehrbarkeit der unendlichen Induktion ist auch

$$\overline{\varepsilon(\mathfrak{z} + 1) < \mathfrak{a}} \vee \mathfrak{P}_x(\mathfrak{A}(x)) \vee \overline{\mathfrak{z} < \varepsilon(\mathfrak{z} + 1)} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$$

mit einer Ordnung $< \alpha$ herleitbar, nach Schnitten mit (5a), (5b) auch

$$\overline{\mathfrak{P}_x}(\mathfrak{A}(x)) \vee \overline{\mathfrak{z} < \mathfrak{a}} \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z}).$$

Nach der Schnitt-Elimination bleiben die Herleitungsordnungen unter α. Durch unendliche Induktion ergibt sich daraus eine schnittfreie Herleitung der Ordnung α für die verlangte Formel $\mathfrak{I}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{a})$.

Wenden wir nun den Eliminationssatz auf Satz V an, so erhalten wir in Verbindung mit Satz VII den

Existenzsatz: Für die transfinite Induktion bis zu einer der Ordnungszahl α entsprechenden Ziffer $\mathfrak{a}$ gibt es zu jeder Formel $\mathfrak{A}$ eine schnittfreie Herleitung, deren Ordnung

a) *kleiner als die erste auf α folgende ε-Zahl (bezw. ω) ist,*

b) *gleich α ist, falls α eine ε-Zahl (oder ω) ist.*

§ 5. Minimalordnungen der Induktionsherleitungen.

Um Aufschluß über die kleinstmöglichen Herleitungsordnungen der transfiniten Induktion zu erhalten, führen wir zunächst eine „*Prädikatenvariable*" A mit einer Argumentstelle ein. Diese besitzt keine logische Wertung für Ziffernargumente, tritt daher auch nicht in den bisher angegebenen Grundformeln auf, sondern nur in den zusätzlich einzuführenden

Grundformeln c): $\overline{A}(\mathfrak{s}) \vee A(\mathfrak{t})$ für Terme $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ mit gleichem Ziffernwert.

Als „*allgemeine transfinite Induktion bis* $\mathfrak{z}$" bezeichnen wir die Formel

$$\mathfrak{I}_x(A(x), \mathfrak{z}).$$

Wir werden sehen, daß der Eliminationssatz auch bei Hinzunahme der Prädikatenvariablen A in gleicher Weise wie vorher gilt. Dann kann der im vorigen Paragraphen aufgestellte Existenzsatz auch auf die allgemeine transfinite Induktion ausgedehnt werden. Bei den Beweisen der Sätze I bis VII, aus denen der Existenzsatz folgt, ist ja von einer individuellen Wertung inner-

halb der Formel $\mathfrak{A}$ kein Gebrauch gemacht worden. Die Tatsache der Wertung ist vielmehr nur zur Herleitbarkeit der Formeln (1a), (1b) herangezogen worden. Diese Formeln lassen sich aber auch unter Einbeziehung der Prädikatenvariablen A bei Hinzunahme der Grundformeln c) mit endlichen Ordnungen herleiten.

Wir nehmen nun eine *Erweiterung des Kodifikats* vor durch die

Grundformeln d): A (t) für Terme t vom Ziffernwert 0

und durch das Schlußschema:

IV. Progressionsschluß für den Term t vom Ziffernwert $\mathfrak{a} > 0$

$$\frac{A(\mathfrak{z}) \vee \mathfrak{R} \text{ für jede Ziffer } \mathfrak{z} < \mathfrak{a}}{A(\mathrm{t}) \vee \mathfrak{R}}.$$

Hierbei ist wie im vorigen Paragraphen das Prädikat „<" bezüglich einer Abbildung von Ordnungszahlen auf die Ziffern zu verstehen.

Für die Ordnungen gilt ebenso wie bei den aufbauenden Schlüssen und Schnitten, daß jede Oberformel eines Progressionsschlusses kleinere Ordnung als die Unterformel haben soll.

Man überzeugt sich leicht, daß auch in diesem erweiterten Kodifikat die „*Term-Umsetzungen*" möglich sind und die „*Umkehrbarkeit*" der Kompositionsschlüsse, Negationsschlüsse und unendlichen Induktionen bestehen bleibt.

Der Beweis für die *Eliminierbarkeit der Schnitte* läßt sich mit einer Ergänzung genau so wie in § 3 führen. Ist der letzte nicht umformende Schluß ein Progressionsschluß, so gilt dasselbe wie im Falle eines aufbauenden Schlusses. Nur bei der Elimination des Schnittes (Σ) ist noch ein Fall zu berücksichtigen, nämlich

V. Fall. $\mathfrak{S}$ hat die Form A (t).

Wir gehen dann ähnlich wie beim IV. Fall vor, indem wir den Formelbund von $\overline{A}$ (t) in der reduzierten Herleitung der rechten Oberformel

$$\overline{A}(\mathrm{t}) \vee \mathfrak{T}$$

betrachten. Die obersten Glieder desselben sind außer in Hauptgliedern von Abschwächungen nur in Grundformeln

$$\overline{A}(\mathrm{t}) \vee A(\mathfrak{s}_i)$$

enthalten, wo $\mathfrak{s}_i$ den gleichen Ziffernwert wie t besitzt. Den übrigen aufbauenden Schlüssen, Schnitten und Progressionsschlüssen gehören die Glieder des Formelbundes nur in Nebengliedern an. Aus der reduzierten Herleitung der linken Oberformel

$$\mathfrak{R} \vee A(\mathrm{t})$$

bilden wir durch Term-Umsetzungen reduzierte Herleitungen von

$$\mathfrak{R} \vee A(\mathfrak{s}_i).$$

Sodann ersetzen wir jede zu dem Formelbund gehörende Grundformel

$$\overline{A}(\mathrm{t}) \vee A(\mathfrak{s}_i)$$

durch die entsprechende Formel

$$\mathfrak{R} \vee A(\mathfrak{s}_i)$$

mit ihrer reduzierten Herleitung. Wird nun in dem ganzen Formelbund $\overline{A}$ (t) durch $\mathfrak{R}$ ersetzt, so bleibt der Herleitungszusammenhang gewahrt, und aus

der reduzierten Herleitung der rechten Oberformel entsteht eine reduzierte Herleitung von $\mathfrak{R} \lor \mathfrak{T}$. Haben die ursprünglichen Herleitungen der Oberformeln die Ordnungen α_1, α_2, so haben die entsprechenden reduzierten Herleitungen die Ordnungen 2^{α_1}, 2^{α_2}. Es soll nun wie im IV. Fall jede Formel der Ordnung β in der neuen Herleitung die Ordnung $2^{\alpha_1} + \beta$ erhalten. Dadurch werden wiederum die Ordnungsbedingungen erfüllt, und die Endformel der neuen Herleitung erhält die Ordnung

$$2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} \leqq 2^{max\,(\alpha_1,\,\alpha_2)+1} \leqq 2^{\alpha}.$$

Damit ist die Eliminierbarkeit der Schnitte auch für das erweiterte Kodifikat nachgewiesen, und zwar mit denselben Ordnungserhöhungen, wie sie im engeren Kodifikat bestehen. Der Eliminationssatz gilt also mit unverändertem Wortlaut auch für das erweiterte Kodifikat. Dasselbe ist der Fall, wenn nur die Prädikatenvariable A mit den Grundformeln c), aber ohne die Grundformeln d) und ohne Progressionsschlüsse hinzugenommen wird.

Die Bedeutung des erweiterten Kodifikats zeigt sich an folgenden Sätzen.

Satz 1. Aus einer im engeren Kodifikat (einschließlich der Grundformeln c)) geführten Herleitung der allgemeinen transfiniten Induktion bis $\mathfrak{a}$ ist im erweiterten Kodifikat unter endlicher Ordnungserhöhung eine Herleitung von $A\,(\mathfrak{a})$ zu gewinnen.

Beweis: Für alle Ziffern $\mathfrak{y} < \mathfrak{z}$ erhalten wir aus den

Grundformeln	$\mathfrak{y} < \mathfrak{z}$	mit der Ordnung 0,
durch Negationsschluß	$\overline{\overline{\mathfrak{y} < \mathfrak{z}}}$	mit der Ordnung 1,
durch Abschwächung	$\overline{\mathfrak{y} < \mathfrak{z}} \lor A\,(\mathfrak{y})$	mit der Ordnung 2,

durch Komposition mit den Grundformeln $\overline{A}\,(\mathfrak{y}) \lor A\,(\mathfrak{y})$

$$\overline{\overline{\mathfrak{y} < \mathfrak{z}} \lor A\,(\mathfrak{y})} \lor A\,(\mathfrak{y}) \quad \text{mit der Ordnung 3,}$$

durch Bindungsschluß	$\overline{A^*}\,(\mathfrak{z}) \lor A\,(\mathfrak{y})$	mit der Ordnung 4,
durch Progression [7]	$\overline{A^*}\,(\mathfrak{z}) \lor A\,(\mathfrak{z})$	mit der Ordnung 5.

Diese Herleitungen gelten für alle Ziffern $\mathfrak{z} > 0$. Außerdem erhalten wir aus Grundformel d) durch Abschwächung

$$\overline{A^*}\,(0) \lor A\,(0) \quad \text{mit der Ordnung 1,}$$

so daß [7] für jede Ziffer $\mathfrak{z}$ mit einer Ordnung $\leqq 5$ herleitbar ist. Durch unendliche Induktion folgt

$$[8] \quad \mathfrak{P}_x\,(\mathfrak{A}\,(x)) \quad \text{mit der Ordnung 6.}$$

Ferner ist

$$\overline{\overline{A^*}\,(\mathfrak{a}) \lor A\,(\mathfrak{a})} \lor \overline{A^*}\,(\mathfrak{a}) \lor A\,(\mathfrak{a})$$

mit endlicher Ordnung herleitbar und hieraus durch Bindungsschluß

$$[9] \quad \overline{\mathfrak{P}_x}\,(A\,(x)) \lor \overline{A^*}\,(\mathfrak{a}) \lor A\,(\mathfrak{a}).$$

Die Herleitung der allgemeinen transfiniten Induktion

$$\overline{\mathfrak{P}_x}\,(A\,(x)) \lor A^*\,(\mathfrak{a})$$

ergänzen wir durch einen Schnitt mit [9] und durch umformende Schlüsse zu

$$\overline{\mathfrak{P}_x}\,(A\,(x)) \lor A\,(\mathfrak{a})$$

schließlich durch einen Schnitt mit [8] zur Herleitung von

$$A\,(\mathfrak{a}).$$

Satz 2. Eine schnittfreie Herleitung von A $(\mathfrak{a})$ in dem erweiterten Kodifikat hat als Ordnung mindestens die Ordnungszahl, welche der Ziffer $\mathfrak{a}$ entspricht.

Beweis: Der Endformel A $(\mathfrak{a})$ kann kein umformender oder aufbauender Schluß vorangehen. Ist die Herleitung schnittfrei, so muß also entweder die Endformel eine Grundformel sein oder aus einem Progressionsschluß hervorgehen. Im ersten Fall kommt nur eine Grundformel d) in Betracht, und $\mathfrak{a}$ muß den Ziffernwert 0 haben. Im zweiten Fall sind die Ordnungen der Oberformeln kleiner als die Herleitungsordnung. Gilt der Satz für diese kleineren Ordnungen, so ist die Herleitungsordnung größer als jede Ordnungszahl, welche kleiner als die zu $\mathfrak{a}$ gehörende Ordnungszahl ist, also mindestens gleich dieser. Damit ist der Satz durch transfinite Induktion bewiesen.

Satz 3. Für eine Ziffer $\mathfrak{a}$, welche der Ordnungszahl α entspricht, hat in dem erweiterten Kodifikat jede Herleitung von A $(\mathfrak{a})$ eine Ordnung

a) größer als jede ε-Zahl (bzw. ω), welche kleiner als α ist,

b) mindestens α, falls α eine ε-Zahl (oder ω) ist.

Beweis: Würde es eine Herleitung von A $(\mathfrak{a})$ mit kleinerer Ordnung geben, so hätten wir nach dem Eliminationssatz auch eine schnittfreie Herleitung mit einer Ordnung $< \alpha$, was im Widerspruch zu Satz 2 steht.

Aus den Sätzen 1 und 3 folgt der

Satz der Minimalordnung einer Induktions-Herleitung: Für die Ziffer $\mathfrak{a}$, welche der Ordnungszahl α entspricht, hat jede Herleitung der allgemeinen transfiniten Induktion bis $\mathfrak{a}$ im engeren Kodifikat als Ordnung mindestens

a) *die letzte ε-Zahl (bzw. ω), welche kleiner als α ist (falls es eine solche Zahl gibt),*

b) *die Zahl α, falls α eine ε-Zahl (oder ω) ist.*

Dieser Satz ergänzt den Existenzsatz dahin, daß die dort angegebenen Ordnungen der Induktions-Herleitungen (auch bei Verwendung von Schnitten) nicht mehr über ε-Zahlen hinweg vermindert werden können.

Will man das Kodifikat so weit ausdehnen, daß es die transfinite Induktion (formal) bis zu einer bestimmten Zahl enthält, so muß daher zum Widerspruchsfreiheitsbeweis die transfinite Induktion (metamathematisch) bis zur nächsten ε-Zahl herangezogen werden.

An die Stelle der „*transfiniten Induktion bis ω*" kann auch die „*vollständige Induktion*"

$$\mathfrak{B}_x\,(\mathfrak{A}\,(x)) \equiv \mathfrak{A}\,(0) \vee \overline{(x)}\,[\overline{\mathfrak{A}}\,(x) \vee \mathfrak{A}\,(x')] \vee (x)\,\mathfrak{A}\,(x)$$

treten. Diese Induktionen sind nämlich in dem Sinne „*deduktionsgleich*", daß eine der Formeln $\mathfrak{J}_x\,(\mathfrak{A}\,(x), \omega)$, $\mathfrak{B}_x\,(\mathfrak{A}\,(x))$ für jedes $\mathfrak{A}$ mit endlichen Ordnungen hergeleitet werden kann, wenn die andere der beiden Formeln für jedes $\mathfrak{A}$ als Grundformel zugelassen wird. Diese Deduktionsgleichheit läßt sich nachweisen unter Benutzung berechenbarer Funktionen, welche Beziehungen zwischen den Ziffernfolgen $0, 0', 0'', \ldots$ und $0, 1, 2, \ldots$ herstellen. Wir können auch leicht direkt eine Herleitung der Ordnung ω für $\mathfrak{B}_x\,(\mathfrak{A}\,(x))$ bilden. Dazu gehen wir aus von Herleitungen für

$$\mathfrak{W}_x\,(\mathfrak{A}\,(x), \mathfrak{z}) \equiv \overline{\mathfrak{A}}\,(0) \vee \overline{(x)}\,[\overline{\mathfrak{A}}\,(x) \vee A\,(x')] \vee \mathfrak{A}\,(\mathfrak{z}).$$

Wie wir in § 1 gesehen haben, ist

$$\overline{\mathfrak{A}}(0) \vee \mathfrak{A}(0)$$

mit endlicher Ordnung herleitbar, also nach einer Abschwächung auch $\mathfrak{W}_x(\mathfrak{A}(x), 0)$. Ebenso ist für eine beliebige Ziffer $\mathfrak{z}$ die Formel

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{z}) \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z}')} \vee \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{z}) \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z}')$$

mit endlicher Ordnung herleitbar, woraus durch Bindungsschluß

$$\overline{(x)}\,[\overline{\mathfrak{A}}(x) \vee \mathfrak{A}(x')] \vee \overline{\mathfrak{A}}(\mathfrak{z}) \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z}')$$

folgt. Ist nun $\mathfrak{W}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{z})$ mit endlicher Ordnung hergeleitet, so erhält man nach einem Schnitt (mit dem Schnittglied $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$) und einer Zusammenziehung auch

$$\overline{\mathfrak{A}}(0) \vee \overline{(x)}\,[\overline{\mathfrak{A}}(x) \vee \mathfrak{A}(x')] \vee \mathfrak{A}(\mathfrak{z}'), \text{ d. h. } \mathfrak{W}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{z}').$$

Somit gibt es für alle Formeln $\mathfrak{W}_x(\mathfrak{A}(x), \mathfrak{z})$ Herleitungen endlicher Ordnungen, wobei die verwendeten Schnitte bei festem $\mathfrak{A}$ gleichen Grad haben. Daraus ist durch unendliche Induktion die Formel $\mathfrak{B}_x(\mathfrak{A}(x))$ mit der Ordnung ω zu erhalten.

§ 6. Endliche Teilkodifikate, ω-Vollständigkeit.

Will man sich auf ein Kodifikat mit endlichen Herleitungen beschränken, so muß man „*freie Zahlvariablen*" $a, b, c, \ldots$ einführen und statt der unendlichen Induktion das Schlußschema

$$\frac{\mathfrak{A}(a) \vee \mathfrak{N}}{(x)\,\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{N}}$$

verwenden (mit der Variablenbedingung, daß die freie Zahlvariable a in der Unterformel nicht vorkommt).

„*Terme*" enthalten dann außer der 0 und den Funktionszeichen auch freie Zahlvariablen. Wir bezeichnen einen Term als „*numerisch*", wenn er ohne freie Zahlvariablen gebildet ist.

Die Grundformeln müssen bei Fortfall des unendlichen Induktionsschlusses etwas weiter gefaßt werden als bisher. Will man die Herleitbarkeit einer quantorenfreien Formel (d. h. einer Formel, welche keine All- oder Existenzzeichen enthält) erreichen, so kann man unter Verwendung des explizit definierten Konjunktionszeichens diese Formel in eine konjunktive Normalform

$$\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_r$$

entwickeln. Zur Herleitbarkeit dieser Formel genügt es, die einzelnen Konjunktionsglieder $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$ als Grundformeln aufzunehmen. Diese sind sämtlich von der Form

$$\mathfrak{P}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{P}_m \vee \overline{\mathfrak{G}_1} \vee \ldots \vee \overline{\mathfrak{G}_n},$$

wo die $\mathfrak{P}_i, \mathfrak{G}_k$ Primformeln sind. Solche Disjunktionen aus Primformeln und einfach negierten Primformeln mögen als „*Primärformeln*" bezeichnet werden. Sie gelten als „*verifizierbar*", wenn sie bei jeder Ersetzung der darin auftretenden freien Zahlvariablen durch Ziffern den Wahrheitswert „*richtig*" annehmen. *Grundformeln* sollen alle *verifizierbaren Primärformeln* sein.

In diesem Kodifikat mit endlichen Herleitungen können die Ordnungen der Herleitungsformeln so gewählt werden, daß Grundformeln die Ordnung 0

erhalten und die Unterformel eines nicht umformenden Schlusses die Ordnung $p + 1$ bzw. $max\,(p, q) + 1$ erhält, wenn die Oberformel die Ordnung p besitzt bzw. bei einem Schluß mit zwei Oberformeln diese die Ordnungen p, q besitzen. Dann hat jede Herleitung des endlichen Kodifikats eine endliche Ordnung.

Ist nun eine Formel

$$\mathfrak{A}\,(a_1, \ldots, a_n),$$

welche keine freien Zahlvariablen außer $a_1, \ldots, a_n$ enthält, in dem endlichen Kodifikat herleitbar, so ist die Formel

$$(x_1) \ldots (x_n)\,\mathfrak{A}\,(x_1, \ldots, x_n)$$

in dem unendlichen Kodifikat mit endlicher Ordnung herleitbar. Um dies einzusehen, bilden wir in dem endlichen Kodifikat aus einer Herleitung der endlichen Ordnung N von $\mathfrak{A}\,(a_1, \ldots, a_n)$ durch Anfügung von Allschlüssen zunächst eine Herleitung von $(x_1) \ldots (x_n)\,\mathfrak{A}\,(x_1, \ldots, x_n)$. Diese hat die Ordnung $N + n$. Wir ersetzen nun jeden Allschluß

$$\frac{\mathfrak{B}\,(a) \vee \mathfrak{R}}{(x)\,\mathfrak{B}\,(x) \vee \mathfrak{R}}$$

in der Weise, daß für die freie Zahlvariable a in der Herleitung von $\mathfrak{B}\,(a) \vee \mathfrak{R}$ eine Ziffer $\mathfrak{z}$ gesetzt wird. So gewinnen wir Herleitungen von $\mathfrak{B}\,(\mathfrak{z}) \vee \mathfrak{R}$ für jede Ziffer $\mathfrak{z}$ und daraus durch unendliche Induktion eine Herleitung von $(x)\,\mathfrak{B}\,(x) \vee \mathfrak{R}$. Dabei bleiben die Formel-Ordnungen unverändert. Sind alle diese Ersetzungen durchgeführt, so werden die evtl. noch auftretenden (überflüssigen) freien Zahlvariablen durch 0 ersetzt. Die Grundformeln (verifizierbaren Primärformeln) gehen dadurch in numerische Primärformeln vom Wahrheitswert „*richtig*" über. Diese sind aus Grundformeln des unendlichen Kodifikats durch Abschwächungen (also mit der Ordnung 1) zu erhalten. Erhöhen wir nun die Ordnungen aller Herleitungsformeln um 1, so erhalten wir eine Herleitung des unendlichen Kodifikats mit der endlichen Ordnung $N + n + 1$. Aus einer im endlichen Kodifikat mit der Ordnung N durchgeführten Herleitung von $\mathfrak{A}\,(a_1, \ldots, a_n)$ ist also im unendlichen Kodifikat eine Herleitung der Ordnung $N + n + 1$ für $(x_1) \ldots (x_n)\,\mathfrak{A}\,(x_1, \ldots, x_n)$ zu gewinnen.

Es möge nun das endliche Kodifikat als zusätzliches Grundformelschema die transfinite Induktion bis zu einer ε-Zahl α oder die vollständige Induktion (welche ja der transfiniten Induktion bis ω entspricht) enthalten. Dann gewinnen wir aus einer im endlichen Kodifikat durchgeführten Herleitung der Ordnung N für eine Formel $\mathfrak{A}\,(a_1, \ldots, a_n)$, welche keine freien Zahlvariablen außer $a_1, \ldots, a_n$ enthält, wie vorher eine Herleitung der Ordnung $N + n$ (ohne freie Zahlvariablen unter Verwendung von unendlichen Induktionsschlüssen) für die Formel $(x_1) \ldots (x_n)\,\mathfrak{A}\,(x_1, \ldots, x_n)$. Dabei treten als Grundformeln

a) „richtige" numerische Primärformeln,

b) Induktions-Grundformeln (der transfiniten Induktion bis α) auf.

Die Induktions-Grundformeln sind in dem unendlichen Kodifikat schnittfrei mit der Ordnung α herleitbar (wenn α eine ε-Zahl oder ω ist). Ersetzen wir wieder die Grundformeln a) durch Abschwächungen von Grundformeln des unendlichen Kodifikats und die Grundformeln b) durch die entsprechenden schnittfreien Herleitungen, so erhalten wir eine Herleitung des unendlichen Kodifikats für $(x_1) \ldots (x_n)\,\mathfrak{A}\,(x_1, \ldots, x_n)$. Die Ordnungen der Herleitungsformeln

erhöhen wir dabei immer von p auf $\alpha + p$, so daß die ganze Herleitung die Ordnung $\alpha + N + n$ erhält.

Damit ist gezeigt: Zu jeder im endlichen Kodifikat unter Verwendung der transfiniten Induktion bis α herleitbaren Formel

$$\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$$

gibt es im unendlichen Kodifikat eine Herleitung von einer Ordnung $< \alpha + \omega$ für die Formel

$$(x_1) \ldots (x_n)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n).$$

In diesem Sinne sind die mit Induktions-Grundformeln erweiterten endlichen Kodifikate in dem unendlichen Kodifikat enthalten. Insbesondere ist die sog. „reine Zahlentheorie", welche die vollständige Induktion als einziges zusätzliches Grundformelschema enthält, in dem unendlichen Kodifikat mit Herleitungen $< \omega + \omega$ enthalten.

Die Eliminierbarkeit der Schnitte und damit die Widerspruchsfreiheit eines endlichen Kodifikats, das durch die transfinite Induktion bis α erweitert ist, läßt sich durch transfinite Induktion bis zur nächsten auf α folgenden ε-Zahl nachweisen. Bis zu dieser Zahl ist auch die transfinite Induktion im endlichen Kodifikat nicht mehr herleitbar (auf Grund des Satzes über die Minimalordnungen der Induktions-Herleitungen), wohl aber bis zu jeder kleineren Zahl.

Die zum Widerspruchsfreiheitsbeweis benötigte transfinite Induktion läßt sich naturgemäß nur für Anfangsstücke der II. Zahlklasse durch eine finite Charakterisierung der entsprechenden Ordnungszahlen konstruktiv gestalten. Hierdurch werden nur die Teilkodifikate mit beschränkten Herleitungsordnungen erfaßt. Solche Teilkodifikate sind nicht ω-vollständig, lassen sich aber fortgesetzt erweitern.

Angenommen, es seien die Ordnungszahlen unterhalb einer Limeszahl λ finit erklärt, und es lägen Herleitungen von $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ für alle Ziffern $\mathfrak{z}$ mit Ordnungen $< \lambda$ vor. Dann läßt sich jedenfalls die finite Erklärung der Ordnungszahlen noch so erweitern, daß sie auch noch alle Ordnungszahlen unterhalb $\lambda + \omega$ erfaßt. Damit überträgt sich der konstruktiv geführte Widerspruchsfreiheitsbeweis von dem Teilkodifikat der Herleitungsordnungen $< \lambda$ auch auf das Teilkodifikat mit den Herleitungsordnungen $< \lambda + \omega$. In dem erweiterten Teilkodifikat läßt sich aus den Herleitungen von $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ durch unendliche Induktion eine Herleitung von $(x)\, \mathfrak{A}(x)$ mit der Ordnung λ bilden.

Die ω-Vollständigkeit kann also in jedem einzelnen Fall fortgesetzt hergestellt werden, und zwar so, daß dabei der konstruktiv geführte Widerspruchsfreiheitsbeweis erhalten bleibt. In diesem Sinne ist das Kodifikat ω-vollständig und zugleich konstruktiv als widerspruchsfrei nachweisbar.

(Eingegangen am 5. Dezember 1949.)

Math. Annalen, Bd. 122, S. 390—399 (1950).

New proof of two theorems concerning tauberian reduction of integrals

by

I. S. GÁL in Paris.

1. Introduction. Consider a sequence $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_N(x), \ldots$ of functions measurable in the sense of Lebesgue, in an interval (a, b). Suppose that the functions $f_N(x)$ belong to the class $L^p(a, b)$, where $p \geqq 1$. In what follows we shall deal with the question as to what can be said about the order of magnitude of the sums

$$(1) \qquad f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_N(x)$$

for almost all values of x, as $N \to \infty$, when the order of magnitude of the integrals

$$\int_a^b (f_{M+1}(x) + f_{M+2}(x) + \cdots + f_{M+N}(x))^p \, d\,x$$

$(M, N = 0, 1, \ldots)$ is known.

The first such result is due to H. RADEMACHER[1]) who proved the following theorem: *If uniformly in M $(M = 0, 1, \ldots)$*

$$(2) \qquad \int_a^b (f_{M+1}(x) + f_{M+2}(x) + \cdots + f_{M+N}(x))^2 \, d\,x = O(N)$$

is verified for $N = 1, 2, \ldots$, then

$$(3) \qquad f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_N(x) = o\left(N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)$$

almost everywhere in $a \leqq x \leqq b$.

We observe that RADEMACHER uses instead of (2) an other condition, that of *quasi-orthogonality*. The sequence $f_N(x)$ is quasi-orthogonal if $\sum_{i=1}^{\infty} z_i^2 \leqq 1$ implies

$$\int_a^b (z_1 f_1(x) + z_2 f_2(x) + \cdots)^2 \, d\,x \leqq 1.$$

By putting $z_1 = z_2 = \cdots = z_M = 0$, $z_{M+1} = z_{M+2} = \cdots = z_{M+N} = N^{-\frac{1}{2}}$ and $z_{M+N+1} = \cdots = 0$ this gives condition (2). This hypothesis (2) is more general than that of RADEMACHER (I do not know whether they are equivalent); the result (3) can be proved under this more general hypothesis.

The theorem just quoted was first modified by myself in connection with an application, where instead of $O(N)$ the expression $O(N (\log \log N)^2)$ stood on the right hand side of (2)[2]). Later in collaboration with J. F. KOKSMA we enounced a general theorem where $O(N)$ is replaced by an arbitrary function $\Phi(M, N)$, increasing in N[3]). In connection with an other problem I could improve our joint result for the case $\Phi(M, N) = N^k$, $k > 1$[4]). Finally jointly with KOKSMA we also made the same improvement for the general case $\Phi(M, N)$[5]).

This last result of ours contains, from the point of view of application, essentially two theorems. In what follows we shall give new proofs of these theorems.

Our joint proof was based on a modification of Rademacher's method. Rademacher obtained (3) as a corrolary of his theorem concerning general orthogonal series. Our modification consisted in avoiding the use of expansions in orthogonal series. As it is known D. MENCHOFF proved the theorem on orthogonal series in a different way[6]). The following proof will be based largely on this method of MENCHOFF.

2. *The first theorem and its proof.* Our method permits the introduction of certain more general functions $F(M, N; x)$ instead of the functions $f_N(x)$. Also we can replace the interval (a, b) by any measurable set $\mathfrak{S}$. We posed jointly with Koksma the following definition:

Let $\mathfrak{S}$ be a measurable set in an euclidian space whose points shall be denoted by x. Suppose that the non-negative functions $F(M, N; x)$ $(M, N = 0, 1, \ldots)$ belong to the class $L^p(\mathfrak{S})$, where $p \geqq 1$. Suppose further that $F(M, 0; x) = 0$ and that

$$F(M, N; x) \leqq F(M, N'; x) + F(M + N', N - N'; x) \tag{4}$$

for every value $0 \leqq N' \leqq N$, $N = 0, 1, \ldots$ and $M = 0, 1, \ldots$.

Hypothesis (4) becomes natural if we consider that $F(M, N; x)$ generalizes the function $|f_{M+1}(x) + \cdots + f_{M+N}(x)|$. This latter verifies in fact $F(M, 0; x) = 0$ and (4) becomes simply the triangle inequality. In the following discussion $\varphi(N) > 0$ will mean an increasing function verifying

$$\sum_{N=2}^{\infty} (N\,\varphi(N))^{-1} < \infty\,; \tag{5}$$

roughly spoken $\varphi(N) = (\log N)^{1+\varepsilon}$, where $\varepsilon > 0$ is arbitrarily small. Under these hypotheses we proved the following theorem:

Theorem 1. A) Suppose that for every couple $(0, N)$ and (M, N) with $0 \leqq N \leqq M - 1$

$$\int_{\mathfrak{S}} F(M, N; x)^p\, dx = O(\Phi(N)\,\psi(M, N)),$$

where $\Phi(N)/N$ is a non-decreasing function of N.

B) Let $\overline{\psi}(N)$ be a positive and increasing function verifying $\overline{\psi}(2^n) \geqq \geqq \psi(0, 2^n)$ and

$$\overline{\psi}(2^n) \geqq \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} 2^{\lambda-n}\, \psi(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}). \tag{6}$$

Conclusion:

$$F(0, N; x) = o\left(\Phi(N)\,\overline{\psi}(N)\,\varphi(N)\,(\log N)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{7}$$

almost everywhere on the set $\mathfrak{S}$.

This theorem includes RADEMACHERs result mentioned above. In this case we can choose $\Phi(N) = N$, $\psi(M, N) = 1$ and $\overline{\psi}(N) = 2\log N$. We thus obtain

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} 2^{\lambda-n}\, \psi(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}) = n < 2\log 2^n = \overline{\psi}(2^n)$$

and hence by theorem 1

$$F(0, N; x) = o\left(N(\log N)^2\,\varphi(N)\right)^{\frac{1}{2}} = o\left(N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\right)$$

almost everywhere.

Proof. By a known theorem of Abel there exists an increasing function $\alpha(N) \to \infty$, such that $\Sigma\, \alpha(N)\,(N\,\varphi(N))^{-1}$ converges at the same time as (5). So it is enough to prove

$$F(0, N; x) = O\left(\Phi(N)\,\overline{\psi}(N)\,\varphi(N)\,(\log N)^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{7 bis}$$

instead of (7).

First we prove a fundamental inequality which is originally due to M. PLANCHEREL[7]). We show that the inequality

$$F(0, N; x) \leqq F(0, 2^n; x) + \sum_{\lambda=1}^{n} F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x) \tag{8}$$

is valid for $N \geqq 2$, where $n = n(N)$ is such that $2^n \leqq N < 2^{n+1}$ and the numbers μ_λ verify

$$0 \leqq \mu_\lambda \leqq 2^{n-\lambda} - 1 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

In fact, let $N \geqq 2$ and consider the dyadic developpement

$$N = 2^n + \varepsilon_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + \varepsilon_1 2 + \varepsilon_0$$

where $n = n(N) \geqq 1$ and $\varepsilon_{\lambda-1} = 0, 1$ for every $\lambda = 1, 2, \ldots, n$. By inequality (5) we obtain successively

$$\begin{aligned} F(0, N; x) &\leqq F(0, 2^n; x) + F(2^n, \varepsilon_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + \varepsilon_0; x) \leqq F(0, 2^n; x) + \\ &+ F(2^n, \varepsilon_{n-1} 2^{n-1}; x) + F(2^n + \varepsilon_{n-1} 2^{n-1}, \varepsilon_{n-2} 2^{n-2} + \cdots + \varepsilon_0, x) \leqq \\ &\leqq \cdots \leqq F(0, 2^n; x) + F(2^n, \varepsilon_{n-1} 2^{n-1}; x) + \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{n} F(2^n + \varepsilon_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + \varepsilon_\lambda 2^\lambda, \varepsilon_{\lambda-1} 2^{\lambda-1}; x). \end{aligned}$$

Introduce now the notations

$$\mu_\lambda = \varepsilon_{n-1} 2^{n-\lambda-1} + \varepsilon_{n-2} 2^{n-\lambda-2} + \cdots + \varepsilon_{\lambda+1} 2 + \varepsilon_\lambda$$

for $\lambda = 1, 2, \ldots, (n-1)$ and suppose that $\mu_n = 0$. These μ_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ verify indeed (9). Using the quantities μ_λ we can write the above inequality in the form

$$F(0, N; x) \leqq F(0, 2^n; x) + \sum_{\lambda=1}^{n} F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, \varepsilon_{\lambda-1} 2^{\lambda-1}; x).$$

We supposed $F(M, 0; x) = 0$ and $F(M, N; x) \geqq 0$, thus, considering that $\varepsilon_{\lambda-1}$ takes the values 0 or 1. we get

$$F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, \varepsilon_{\lambda-1} 2^{\lambda-1}; x) \leqq F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x),$$

and hence (8) follows from our last inequality.

We note in passing, that in MENCHOFFs paper there figures an identity (p. 84, line 8), which corresponds inequality (8). This identity, enounced by the author without proof, is not valid. To obtain the correct identity, the upper limits of summation in the definitions of $A(l, s)$ and $D(x, l, s)$ should be $2^m + s\,2^l + 2^{l-1}$ rather than $2^m + (s+1)\,2^l$. This change does not influence the succeeding parts of the proof there.

Inequality (8) indicates already the steps to follow for the proof, for it results from (8) that to show (7 bis) it suffices to prove the following two assertions:

1° *If n is sufficiently large, then*

$$F(0, 2^n; x) \leqq \left(\Phi(2^n)\,\overline{\psi}(2^n)\,\varphi(2^n)\right)^{\frac{1}{p}}$$

for every $x \in \mathfrak{S}$, excepted at most the points of a set having a measure inferior to a δ given in advance.

2°. *If n is sufficiently large, then independently from the choice of $0 \leq \mu_\lambda \leq \leq 2^{n-\lambda} - 1$*

$$\sum_{\lambda=1}^{n} F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x) \leq 2\left(\Phi(2^n)\,\overline{\psi}(2^n)\,\varphi(2^n)\,n^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

for every $x \in \mathfrak{S}$, excepted at most the points of a set having a measure inferior to δ.

The proof of 1° is very simple. By the hypothesis we have

$$\int \mathfrak{S}\, F(0, 2^n; x)^p\, d\,x = O\left(\Phi(2^n)\,\psi(0, 2^n)\right) = O\left(\Phi(2^n)\,\overline{\psi}(2^n)\right),$$

hence

$$\int \mathfrak{S} \frac{F(0, 2^n; x)^p}{\Phi(2^n)\,\overline{\psi}(2^n)\,\varphi(2^n)}\, d\,x = O\left(\varphi(2^n)^{-1}\right).$$

Denote by $\overline{E}_n$ the measurable set on which

$$F(0, 2^n; x)^p > \Phi(2^n)\,\overline{\psi}(2^n)\,\varphi(2^n):$$

we obtain from the above inequality the estimation

$$\operatorname{meas} \overline{E}_n = \int \overline{E}_n\, d\,x \leq \int \overline{E}_n \frac{F(0, 2^n; x)^p}{\Phi(2^n)\,\psi(2^n)\,\varphi(2^n)}\, d\,x = O\left(\varphi(2^n)^{-1}\right).$$

By hypothesis (5) we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(2^n)^{-1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2^n\,\varphi(2^n)} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{2^{n-1}+1}^{2^n} (N\,\varphi(N))^{-1}\right) =$$

$$= \sum_{N=2}^{\infty} (N\,\varphi(N))^{-1}$$

So the index $n_0 = n_0(\delta)$ can be chosen such that

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \operatorname{meas} \overline{E}_n = O\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi(2^n)^{-1}\right) < \delta.$$

By the definition of the sets $\overline{E}_n$ this implies

$$F(0, 2^n; x) \leq \left(\Phi(2^n)\,\overline{\psi}(2^n)\,\varphi(2^n)\right)^{\frac{1}{p}}$$

for every $n \geq n_0(\delta)$ and for every x excepted a set of measure δ. This is exactly the proposition 1°.

It is the proposition 2° where MENCHOFFs proof differs essentially from the method followed by RADEMACHER and by KOKSMA and myself. This method is based on the following set-theoretical lemma:

Lemma. Let $q \geq 1$ be an arbitrary integer. If $E, E_1, E_2, \ldots, E_r$ are measurable sets in the sense of Lebesgue and

$$E \subset E_1 + E_2 + \cdots + E_r$$

in such way that every $x \in E$ belongs to q sets E_i, then

$$\operatorname{meas} E \leq q^{-1} \sum_{i=1}^{r} \operatorname{meas} E_i.$$

The lemma is due to MENCHOFF, the following proof to A. KHINTCHINE[8]). Let $e(x), e_1(x), \ldots, e_r(x)$ be respectively the characteristic functions of $E, E_1, \ldots, E_r$. As every point of E belongs to at least q sets E_i

$$e(x) \leq q^{-1}\left(e_1(x) + e_2(x) + \cdots + e_r(x)\right).$$

Hence we obtain in fact

$$\operatorname{meas} E = \int \mathfrak{S}\, e(x)\, dx \leqq q^{-1} \sum_{i=1}^{r} \int \mathfrak{S}\, e_i(x)\, dx = q^{-1} \sum_{i=1}^{r} \operatorname{meas} E_i .$$

In the following argument we fix n, thus it will be convenient to introduce the notation

$$F(\lambda, \mu; x) = F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x). \tag{10}$$

The sketch of the proof of 2° is now as follows:

We show first that if x does not belong to an exceptional set, then all values $F(\lambda, \mu; x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, \ldots, 2^{n-\lambda} - 1)$ remain under a certain bound. Thus the expression $\sum_{\lambda=1}^{n} F(\lambda, \mu; x)$ can be very large compared to this bound only if *relatively many* terms $F(\lambda, \mu; x)$ lie near to the possible upper bound. We then shall be able to apply the above lemma to the set of these points x with a relatively great value of q. It will then follow that the measure of the exceptional set is less than an arbitrary δ.

Suppose first that $p > 1$ and define the number R by

$$R = \left[n^{\frac{p-1}{2p+2}} \right]. \tag{11}$$

Let us make the following remark. It follows from the hypothesis that $\Phi(N)/N$ is a non-decreasing function of N that

$$\Phi(2^\lambda) \leqq \Phi(2^n)\, 2^{\lambda - n}. \tag{12}$$

Let now e_1 be the set on which

$$F(\lambda, \mu; x) < R^{\frac{4}{p-1}} \left(\Phi(2^n)\, \overline{\psi}(2^n)\, \varphi(2^n)\, n^{-1} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{13}$$

for every couple (λ, μ). We can easily estimate the measure of $\overline{e_1}$, of the complementary of e_1.

For let $e(\eta, \lambda, \mu)$ be the set on which

$$F(\lambda, \mu; x) \geqq \eta^{\frac{4}{p-1}} \left(\Phi(2^n)\, \overline{\psi}(2^n)\, \varphi(2^n)\, n^{-1} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{14}$$

for a fix couple (λ, μ). Then, by an argument used above,

$$\operatorname{meas} e(\eta, \lambda, \mu) = \int_{e(\eta,\lambda,\mu)} dx \leqq \int_{e(\eta,\lambda,\mu)} \frac{n\, F(\lambda, \mu; x)^p\, dx}{\eta^{\frac{4p}{p-1}}\, \Phi(2^n)\, \overline{\psi}(2^n)\, \varphi(2^n)}$$

so finally

$$\operatorname{meas} e(\eta, \lambda, \mu) = O\left(\frac{n\, \Phi(2^\lambda)\, \psi(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})}{\eta^{\frac{4p}{p-1}}\, \Phi(2^n)\, \overline{\psi}(2^n)\, \varphi(2^n)} \right). \tag{15}$$

It is evident by the definition of the sets e_1 and $e(\eta, \lambda, \mu)$ that

$$\overline{e_1} \subset \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{2^{n-\lambda}-1} e(R, \lambda, \mu),$$

hence by (15)

$$\operatorname{meas} \overline{e_1} = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{2^{n-\lambda}-1} O\left(\frac{n\, \Phi(2^\lambda)\, \psi(2^n + \mu\, 2^\lambda, 2^{\lambda-1})}{R^{\frac{4p}{p-1}}\, \Phi(2^n)\, \overline{\psi}(2^n)\, \varphi(2^n)} \right).$$

Apply now (12)

$$\operatorname{meas} \overline{e_1} = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{2^{n-\lambda}-1} O\left(\frac{n\, 2^{\lambda-n}\, \psi(2^n + \mu\, 2^\lambda, 2^{\lambda-1})}{R^{\frac{4p}{p-1}}\, \overline{\psi}(2^n)\, \varphi(2^n)}\right).$$

Now (11) and (6) imply

$$\operatorname{meas} \overline{e_1} = O\left(\frac{\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{2^{n-\lambda}-1} 2^{\lambda-n}\, \psi(2^n+\mu\, 2^\lambda, 2^{\lambda-1})}{\overline{\psi}(2^n)\, \varphi(2^n)}\right) \frac{n}{n^{\frac{2p}{p+1}}} = O\left(\varphi(2^n)^{-1}\right) n^{\frac{p-1}{p+1}}$$

hence, as $p > 1$, we obtain finally

$$\operatorname{meas} \overline{e_1} = O(\varphi(2^n)^{-1}) \tag{16}$$

Define now the sets e_ϱ; $\varrho = 2, 3, \ldots, R$ in the following way: the point x belongs to e_ϱ if and only if the inequality

$$(\varrho - 1)^{\frac{4}{p-1}} \leqq \frac{F(\lambda, \mu; x)}{\left(\Phi(2^n)\, \overline{\psi}(2^n)\, \varphi(2^n)\, n^{-1}\right)^{\frac{1}{p}}} < \varrho^{\frac{4}{p-1}} \tag{17}$$

is valid for couples (λ, μ) in number less than

$$n\, \varrho^{-\frac{2p+2}{p-1}}.$$

Hence if $x \,\varepsilon\, \overline{e_\varrho}$ then there exist at least

$$q_\varrho = \left[n\, \varrho^{-\frac{2p+2}{p-1}}\right]$$

couples (λ, μ) so that

$$(\varrho - 1)^{\frac{4}{p-1}} \left(\Phi(2^n)\, \overline{\psi}(2^n)\, \varphi(2^n)\, n^{-1}\right)^{\frac{1}{p}} \leqq F(\lambda, \mu; x).$$

We estimate the measure of this set $\overline{e_\varrho}$ using Menchoff's lemma. Let $E_\varrho(\lambda, \mu)$ be the common part of $\overline{e_\varrho}$ and $e(\varrho - 1, \lambda, \mu)$ defined in (14). In virtue of (15)

$$\operatorname{meas} E_\varrho(\lambda, \mu) \leqq \operatorname{meas} e(\varrho - 1, \lambda, \mu) = O\left(\frac{n\, \Phi(2^\lambda)\, \psi(2^n + \mu\, 2^\lambda, 2^{\lambda-1})}{(\varrho-1)^{\frac{4p}{p-1}}\, \Phi(2^n)\, \overline{\psi}(2^n)\, \varphi(2^n)}\right). \tag{18}$$

If now x belongs to $\overline{e_\varrho}$, then it belongs to q_ϱ sets $e(\varrho - 1, \lambda, \mu)$ and hence to the corresponding sets $E_\varrho(\lambda, \mu)$. Thus

$$\overline{e_\varrho} \subset \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{2^{n-\lambda}-1} E_\varrho(\lambda, \mu)$$

in such way that every point belonging to the set on the left hand side belongs to at least q_ϱ sets on the right hand side. So by the lemma and the signification of q_ϱ

$$\operatorname{meas} \overline{e_\varrho} \leqq \varrho^{\frac{2p+2}{p-1}}\, n^{-1} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{2^{n-\lambda}-1} \operatorname{meas} E_\varrho(\lambda, \mu).$$

By (18) we obtain

$$\operatorname{meas} \overline{e_\varrho} \leqq \varrho^{\frac{2p+2}{p-1}}\, n^{-1} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{2^{n-\lambda}-1} O\left(\frac{n\, \Phi(2^\lambda)\, \psi(2^n + \mu\, 2^\lambda, 2^{\lambda-1})}{(\varrho - 1)^{\frac{4p}{p-1}}\, \Phi(2^n)\, \overline{\psi}(2^n)\, \varphi(2^n)}\right).$$

Again by (12)

$$\text{meas}\, \bar{e}_\varrho \leq \varrho^{-2} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{2^{n-\lambda}-1} O\left(\frac{2^{\lambda-n}\, \psi(2^n+\mu\, 2^\lambda, 2^{\lambda-1})}{\bar{\psi}(2^n)\, \varphi(2^n)}\right)$$

and finally by (6)

$$\text{meas}\, \bar{e}_\varrho = \varrho^{-2}\, O\,(\varphi\,(2^n)^{-1}). \tag{19}$$

Define now the set $E_n = e_1 e_2 \ldots e_R$ as the common part of the sets e_1, $e_2, \ldots, e_R$. We have the complementary set

$$\bar{E}_n = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \cdots \bar{e}_R$$

and hence

$$\text{meas}\, \bar{E}_n \leq \sum_{\varrho=1}^{R} \text{meas}\, \bar{e}_\varrho.$$

Using (16) and (19) it follows

$$\text{meas}\, \bar{E}_n = \sum_{\varrho=1}^{R} \varrho^{-2} O\,(\varphi\,(2^n)^{-1}) = O\,(\varphi\,(2^n)^{-1}).$$

This estimation achieves essentially the proof of proposition 2°. We have seen in the proof of 1° that $\sum_{n=2}^{\infty} \varphi\,(2^n)^{-1} < \infty$, and so that the index $n_0 = n_0\,(\delta)$ can be chosen in such way that

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \text{meas}\, \bar{E}_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} O\,(\varphi\,(2^n)^{-1}) < \delta.$$

Thus, to prove 2° we must only show that on the set E_n inequality

$$\sum_{\lambda=1}^{n} F\,(\lambda, \mu;\, x) \leq 2\,(\Phi\,(2^n)\, \bar{\psi}\,(2^n)\, \varphi\,(2^n))^{\frac{1}{p}}\, n^{1-\frac{1}{p}}$$

is verified.

If x belongs to E_n, then it belongs also to the sets e_ϱ ($\varrho = 2, 3, \ldots, R$). Therefore if N_ϱ denotes the number of those couples (λ, μ) for which (17) is verified, then

$$N_\varrho < n\, \varrho^{-\frac{2p+2}{p-1}}. \tag{20}$$

But if $x \varepsilon E_n$, then x belongs also to the set e_1, and thus (13) is verified for every couple (λ, μ). This bound coincides with the one we obtain in (17) when we chose $\varrho = R$. This means that excepted $N_2 + N_3 + \cdots + N_R$ couples (λ, μ), for which (17) is verified, all other couples verify

$$F\,(\lambda, \mu;\, x) \leq (\Phi\,(2^n)\, \bar{\psi}\,(2^n)\, \varphi\,(2^n)\, n^{-1})^{\frac{1}{p}}. \tag{21}$$

Consider now the sum $\sum_{\lambda=1}^{n} F\,(\lambda, \mu;\, x)$. In the most unfavorable case all N_ϱ expressions $F\,(\lambda, \mu;\, x)$, satisfying (17) figure in this sum. Their number is estimated in (20), hence by (17) they give a contribution less than

$$N_\varrho \cdot \varrho^{\frac{4}{p-1}} (\Phi\,(2^n)\, \bar{\psi}\,(2^n)\, \varphi\,(2^n)\, n^{-1})^{\frac{1}{p}} < \varrho^{-2}\,(\Phi\,(2^n)\, \bar{\psi}\,(2^n)\, \varphi\,(2^n))^{\frac{1}{p}} \cdot n^{1-\frac{1}{p}}.$$

Thus we obtain

$$\sum_{\lambda=1}^{n} F\,(\lambda, \mu;\, x) < \left(\sum_{\varrho=2}^{R} \varrho^{-2}\right) (\Phi\,(2^n)\, \bar{\psi}\,(2^n)\, \varphi\,(2^n))^{\frac{1}{p}}\, n^{1-\frac{1}{p}} + \sum{}',$$

where the remaining terms $F\,(\lambda, \mu;\, x)$ figure in the sum $\sum'$. The number of these — taking in account that we have summed for the values $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ — does not exceed n, and each of them verifies (21). Hence

$$\sum{}' < (\Phi\,(2^n)\, \bar{\psi}\,(2^n)\, \varphi\,(2^n))^{\frac{1}{p}}\, n^{1-\frac{1}{p}}$$

and thus our last inequality implies the inequality enounced in proposition 2°. We thus proved theorem 1 for the case $p > 1$.

In the case $p = 1$ MENCHOFFs method fails completely, and to prove 2° we can only the repeat the argument used with KOKSMA (the proof of 1° holds good also for the case $p = 1$.):

The inequality enounced in proposition 2° will proved if we show more, namely the inequality

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{2^{n-\lambda}-1} F(\lambda, \mu; x) \leqq 2\left(\Phi(2^n)\, \overline{\psi}(2^n)\, \varphi(2^n)\right). \tag{22}$$

By the hypothesis and by (12) and (6)

$$\int_{\mathfrak{S}} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{2^{n-\lambda}-1} \frac{F(\lambda, \mu; x)}{2\,\Phi(2^n)\,\overline{\psi}(2^n)\,\varphi(2^n)}\, dx =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{2^{n-\lambda}-1} O\left(\frac{\Phi(2^\lambda)\,\psi(2^n + \mu\, 2^\lambda, 2^{\lambda-1})}{\Phi(2^n)\,\overline{\psi}(2^n)\,\varphi(2^n)}\right) =$$

$$= O\left(\frac{\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{2^{n-\lambda}-1} 2^{\lambda-n}\,\psi(2^n + \mu\, 2^\lambda, 2^{\lambda-1})}{\overline{\psi}(2^n)\,\varphi(2^n)}\right) = O\left(\varphi(2^n)^{-1}\right).$$

thus the measure of the set where (22) does not holds is $O\left(\varphi(2^n)^{-1}\right)$.

Using the fact that $\sum_{n=2}^{\infty} \varphi(2^n)^{-1}$ converges we see that (22) holds on $\mathfrak{S}$ excepted a set of measure δ if only n is sufficiently large. Thus we have proved theorem 1 also for the case $p = 1$.

3. The second theorem and its proof. Among the hypotheses of theorem 1 figures the condition that $\Phi(N)/N$ is a non-decreasing function of N. Our second theorem concerns the case when $\Phi(N)/N^{1+\gamma}$ is a non-decreasing function, where γ is an arbitrarily small positive number. In this case our result is as follows:

Theorem 2. A) Suppose that for every couple $(0, N)$ and (M, N): $0 \leqq N \leqq M - 1$

$$\int_{\mathfrak{S}} F(M, N; x)^p\, dx = O\left(\Phi(N)\, \psi(M, N)\right),$$

where $\Phi(N)/N^{1+\gamma}$ $(\gamma > 0)$ is a non-decreasing function of N.

B) Let $\overline{\psi}(N)$ be a positive and increasing function verifying $\psi(2^n) \geqq \geqq \psi(0, 2^n)$ and for any α $(0 \leqq \alpha < \gamma)$

$$\psi(2^n) \geqq \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} 2^{(\lambda-n)(1+\alpha)}\, \psi(2^n + \mu_\lambda\, 2^\lambda, 2^{\lambda-1}).$$

Conclusion:

$$F(0, N; x) = o\left(\Phi(N)\, \overline{\psi}(N)\, \varphi(N)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{23}$$

almost everywhere on the set $\mathfrak{S}$.

Proof. Let us take into consideration the partial results contained in the proof of theorem 1. First we see that, correspondingly to (7 bis), it will suffice here also to prove

$$F(0, N; x) = O\left(\Phi(N)\, \psi(N)\, \varphi(N)\right)^{\frac{1}{p}}$$

as (23) follows applying ABELs theorem.

It is clear further that the fundamental inequality (8) will hold true in the present case, together with the restrictions imposed on the quantities μ_λ by (9). Finally, as no hypotheses concerning $\Phi(N)$ were used in establishing 1°, this proposition will also be valid in the actual case. Hence by (8) it will be enough to prove the following proposition:

3°. *If n is sufficiently large, then independently from the choice of μ_λ*

$$\sum_{\lambda=1}^{n} F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}, x) \leq c(\gamma, p)\,(\Phi(2^n)\,\psi(2^n)\,\varphi(2^n))^{\frac{1}{p}}$$

for every $x \varepsilon \mathfrak{S}$, excepted, at most the points of a set having a measure inferior to δ. (Here $c(\gamma, p)$ denotes a constant depending only γ and p.)

To prove this assertion define the set $e(\lambda, \mu)$ as the set on which

$$\frac{F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x)}{(\Phi(2^n)\,\bar{\psi}(2^n)\,\varphi(2^n))^{\frac{1}{p}}} < 2^{\frac{(\lambda-n)(\gamma-\alpha)}{p}} \tag{24}$$

is verified. The complementary $\bar{e}(\lambda, \mu)$ of the set $e(\lambda, \mu)$ can be estimated in the known way. By hypothesis A) we obtain

$$\begin{aligned}\operatorname{meas} \bar{e}(\lambda, \mu) &\leq \int_{\mathfrak{S}} \frac{F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x)^p}{\Phi(2^n)\,\psi(2^n)\,\varphi(2^n)}\, 2^{-(\lambda-n)(\gamma-\alpha)} \cdot dx \\ &= O\left(2^{-(\lambda-n)(\gamma-\alpha)} \frac{\Phi(2^\lambda)\,\psi(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})}{\Phi(2^n)\,\bar{\psi}(2^n)\,\varphi(2^n)}\right)\end{aligned}$$

Consider now the common part E_n of the sets $e(\lambda, \mu)$. We can estimate the measure of the complementary of E_n immediately because of the relation

$$\bar{E}_n \subset \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} \bar{e}(\lambda, \mu).$$

Hence it follows, using the above estimation,

$$\begin{aligned}\operatorname{meas} \bar{E}_n &\leq \sum_\lambda \sum_{\mu_\lambda} \operatorname{meas} \bar{e}(\lambda, \mu) = \\ &= \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} O\left(2^{(\lambda-n)(\alpha-\gamma)} \cdot \frac{\Phi(2^\lambda)}{\Phi(2^n)} \cdot \frac{\psi(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})}{\bar{\psi}(2^n)\,\varphi(2^n)}\right).\end{aligned}$$

On the other hand it follows from our hypothesis concerning the function $\Phi(N)$ that

$$\frac{\Phi(2^\lambda)}{\Phi(2^n)} \leq \frac{2^{\lambda(1+\gamma)}}{2^{n(1+\gamma)}} = 2^{(\lambda-n)(1+\gamma)}$$

for every value $\lambda = 1, 2, \ldots, n$. Hence

$$\operatorname{meas} \bar{E}_n = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} O\left(2^{(\lambda-n)(1+\alpha)} \frac{\psi(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1})}{\bar{\psi}(2^n)}\right) \varphi(2^n)^{-1}.$$

If we consider finally that by hypothesis B)

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} 2^{(\lambda-n)(1+\alpha)}\, \psi(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}) \leq \bar{\psi}(2^n),$$

then we obtain the result

$$\operatorname{meas} \bar{E}_n = O(\varphi(2^n)^{-1})$$

Because of the convergence of the series $\sum_2^\infty \varphi(2^n)^{-1}$ the index $n_0(\delta)$ can be chosen so that $\sum_{n=n_0}^\infty \operatorname{meas} \overline{E}_n < \delta$. Thus it suffices to show that in the set E_n the inequality of proposition 3° is verified.

In fact E_n is the common part of the sets $e(\lambda, \mu)$. By definition (24) holds in $e(\lambda, \mu)$ and so (24) holds for every choice of $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ and $\mu_\lambda = 0, 1, \ldots, 2^{n-\lambda} - 1$ in E_n. Thus on the set E_n

$$\frac{\sum_{\lambda=1}^n F(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}; x)}{(\Phi(2^n)\psi(2^n)\varphi(2^n))^{\frac{1}{p}}} < \sum_{\lambda=1}^n 2^{-\frac{(\alpha-\gamma)(\lambda-n)}{p}} < \sum_{\lambda=1}^\infty 2^{-\frac{(\alpha-\gamma)\lambda}{p}}$$

is verified, which proves proposition 3° and also theorem 2.

We do not want to discuss here the special cases of the theorems just proved, the reader will find a detailed exposition in our joint work with Koksma. Here we want to mention only a special case of theorem 2, which yields easily an estimation for the arithmetical mean

$$\sum_{\nu=1}^N \left(1 - \frac{\nu-1}{N}\right) \varphi_\nu(x)$$

of an orthonormal sequence[9]). This special case is as follows:

Theorem 3. If the sequence of functions $F(M, N; x) \geqq 0$ is such that

$$\int_{\mathfrak{S}} F(M, N; x)^2 \, dx = O(N^2(M+N))$$

for every $(0, N)$ and (M, N) with $0 \leqq N \leqq M-1$, then $F(0, N; x) = O(N^3 \varphi(N))^{\frac{1}{2}}$ almost everywhere on the set $\mathfrak{S}$.

In fact let us put in theorem 2 $\Phi(N) = N^2$ and $\psi(M, N) = M + N$ and let $\gamma = 1$, $p = 2$. If we choose $\overline{\psi}(N) = 4N$ then $\overline{\psi}(N)$ increases, has a positive sign and $\overline{\psi}(2^n) > 2^n = \psi(0, 2^n)$. Further by (9)

$$\psi(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}) = 2^n + \mu_\lambda 2^\lambda + 2^{\lambda-1} < 2^{n+1}$$

and thus

$$\sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} 2^{(\lambda-n)(1+\gamma)} \cdot \psi(2^n + \mu_\lambda 2^\lambda, 2^{\lambda-1}) <$$

$$< \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu_\lambda=0}^{2^{n-\lambda}-1} 2^{2(\lambda-n)} = 2^{n+1} \sum_{\lambda=1}^n 2^{\lambda-n} < 2^{n+2} = \overline{\psi}(2^n).$$

Therefore by the choice $\overline{\psi}(N) = 4N$ hypothesis $B)$ is verified and thus by (23)

$$F(0, N; x) = O(N^2 \cdot 4N\varphi(N))^{\frac{1}{2}} = O(N^3\varphi(N))^{\frac{1}{2}}$$

almost everywhere on $\mathfrak{S}$. And this is what we had to prove.

[1]) Rademacher, H.: Math. Ann. 87, 112 (1922). — [2]) Gál, I. S.: Nieuw Arch. Wisk. (Amsterdam) 23, 13 (1949). — [3]) Gál, I. S., a. J. F. Koksma: C. r. 227, 1321 (1948). — [4]) Gál, I. S.: C. r. 228, 336 (1949). — [5]) Gál, I. S. a. J. F. Koksma: Proc. (Amsterdam) 53, 638 (1950). — [6]) Menchoff, D.: Fund. math. 4, 82 (1923). — [7]) Plancherel, M.: C. r. 157, 539 (1913). — [8]) Cf. l. c. 6), p. 84. — [9]) Gál, I. S.: Ann. Grenoble 1, 50 (1950).

(Eingegangen am 12. Juli 1950.)

Math. Annalen, Bd. 122, S. 400—410 (1951).

Die Differentiation beliebiger reeller Ordnung[1]).

Von

N. Stuloff in München.

I. Einleitung.

Das Problem, eine Differentialrechnung aufzustellen, die eine Differentiation beliebiger reeller Ordnung ermöglicht, ist bereits so alt wie die Differentialrechnung selbst, da die ersten Versuche darüber sich schon bei Leibniz finden. In der Folge wurde dieses Problem von Euler, Fourier, Liouville u. a. m. behandelt. Einen sehr guten Überblick über die Entwicklung dieser Frage bietet eine Arbeit von K. Bochow[2]). Die unternommenen Versuche tragen größtenteils den Charakter einer Verallgemeinerung, d. h. sie suchen eine Rechnung aufzustellen, aus der die gewöhnliche Differentialrechnung als Spezialfall bei ganzzahliger Ordnung hervorgeht. Dabei ist man vielfach so vorgegangen, daß man diejenigen Ausdrücke für die n-fache Ableitung, die sich durch n direkt ausdrücken lassen, nun auch dann für gültig erklärte, wenn dieses n eine irgendwie gebrochene Zahl ist. So hat z. B Fourier[3]) die durch gewöhnliche Differentiation erhaltene Formel

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

auch auf beliebig gebrochene n ausgedehnt. Naturgemäß folgt daraus, daß die erhaltenen Resultate nicht mehr eindeutig sind, da ja an sich der Vielfalt der Verallgemeinerung keine Grenze gesetzt ist. Die verbleibende Willkür ist auch nicht zuletzt der Grund dafür, daß eine solche Differentialrechnung keinen großen Eingang in die Wissenschaft gefunden hat. Auf die verschiedenen Ergebnisse und Methoden der früheren Arbeiten, die von dieser Vielfalt zeugen, soll hier im einzelnen nicht eingegangen werden, sondern es sei auf die in der erwähnten Arbeit von K. Bochow befindliche Zusammenstellung verwiesen. Von den späteren Autoren sei hier A. Krug[4]) erwähnt. Der Verfasser versuchte eine Ableitung dadurch zu definieren, daß er sie den drei folgenden Gesetzen unterwarf:

$$1)\ \frac{\partial F(z, n)}{\partial z} = F(z, n+1) \quad 2)\ F(z, -\nu) = \int_a^{z(\nu)} f(z)\,dz \quad 3)\ D^m D^n f(z) = D^{m+n} f(z).$$

Dabei bedeutet $D^n f(z)$ die Ableitung beliebiger Ordnung von $f(z)$, wo n eine beliebige, auch komplexe Zahl bedeutet, und es ist $D^n f(z) = F(z, n)$ gesetzt. Dadurch, daß die so eingeführte Ableitung den obigen Gesetzen genügen sollte, wurde eine möglichst weitgehende Anpassung an die gewöhnliche Differentialrechnung erstrebt. Die daraus entstehenden Ergebnisse sind von einem freien Parameter abhängig; ihre Entstehung war daran gebunden,

[1]) Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen als Dissertation (D 7) angenommen.

[2]) Bochow, K.: Differentiation zu beliebigem Index, Diss. Halle 1885.

[3]) Fourier: Théorie de la Chaleur, 1822, Oeuvres 1, p. 508.

[4]) Krug, A.: Theorie der Derivationen. Wiener Denkschr. 57, 151 (1889).

gewissen Gesetzen zu genügen, die der Differentialrechnung für positiv-ganze n entlehnt sind. In den darauffolgenden Arbeiten wurden solche Ableitungen definiert unter anderem durch Differentialgleichungen[5]), Integralgleichungen[6]) und ferner auch durch Einführung von Operatoren[7]).

Auf der anderen Seite haben es auch einige Autoren versucht, eine verallgemeinerte Ableitung direkt aus dem Grenzprozeß eines Ausdruckes zu gewinnen, der in die Form $\frac{0}{0}$ übergeht. Zuerst wurde dies von LIOUVILLE[8]), der von Funktionen ausging, die in Exponentialreihen entwickelbar sind, beiläufig erwähnt. Später behandelte K. BOCHOW diese Frage ziemlich eingehend, aber es kam dabei nicht zu einem eindeutigen Kalkül; es scheiterte an einer Schwierigkeit, die dadurch entstand, daß es sich dann um zwei Grenzprozesse handelt, die auszuführen sind. Um dies kurz zu veranschaulichen, soll das Ergebnis von K. BOCHOW herangezogen werden. Auf S. 15 der in Anm. 2 erwähnten Arbeit geht der Verfasser aus von der Reihe

$$D_x^\xi f(x) = (-1)^\xi \lim_{h\to 0}\left\{h^{-\xi}\sum_{k=1}^{\xi+1}\left[(-1)^{k-1}\binom{\xi}{k-1} f(x+\overline{k-1}\,h)\right]\right\},$$

die den gewöhnlichen Differentialquotienten der positiven ganzzahligen Ordnung ξ darstellt. Darauf geht BOCHOW dadurch zu einem beliebig gebrochenen ξ über, daß er die vorliegende Reihe „ins Unendliche ausdehnt", weil, wie er sagt, die auftretenden Binomialkoeffizienten $\binom{\xi}{k-1}$ für kein endliches k zu Null werden, wenn ξ keine ganze Zahl ist. Aus diesen beiden Grenzübergängen macht der Verf. einen doppelten Grenzübergang, indem er also gleichzeitig $h \to 0$ und die Partialsumme der obigen Reihe ihrem Grenzwert zustreben läßt. So ergibt sich auch hier eine Vieldeutigkeit, weil dann das Produkt $(k-1)\,h$ bei $k \to \infty$ und gleichzeitigem $h \to 0$ einem Grenzwert s zustrebt, der unbestimmt bleibt und den der Verf. als „Intervall" bezeichnet. Weiter wird gezeigt, daß nur im Fall eines positiv-ganzzahligen ξ die Ableitung von diesem Intervall unabhängig bleibt.

Ähnliche Versuche, wobei auch stets dieser freie Parameter auftritt, finden sich in den früheren Arbeiten bei RIEMANN[9]), GRÜNWALD[10]), MOST[11]) und VON SCHÄWEN[12]).

Aus allen diesen Definitionen geht wohl die gewöhnliche Differentialrechnung als ein Spezialfall für positiv-ganzzahlige Indizes hervor, und sie wären daher alle gleichberechtigt, als verallgemeinerte Differentialrechnungen bezeichnet zu werden. Durch die aber verbleibende Willkür konnte der mehr oder weniger formelle Charakter derselben nicht ausgeschaltet werden.

In der vorliegenden Arbeit soll der Versuch gemacht werden, eine Differentialrechnung von vorneherein so aufzustellen, daß sie sogleich für jede

---

[5]) LINDNER, P.: Über die Differentiation mit komplexem Index und ihre Beziehung zur hypergeometrischen Funktion. Sitzgsber. Berl. math. Ges. 7, 77 (1908).

[6]) WEYL, H.: Vjschr. naturf. Ges. Zürich 62, 246 (1917).

[7]) POST, E. L.: Generalized Differentiation. Trans. Amer. math. Soc. 32, 723 (1930) und auch O. HEAVISIDE: Electromagnetic Theory. London 1922, Bd. 2, Kap. 7 u. 8.

[8]) LIOUVILLE, J.: Mémoire sur le Calcul des Différentielles à l'Indice quelconque. J. École Polytechn. Paris 1832/36, cah. 21, 24, 25.

[9]) RIEMANN, B.: Gesammelte Werke 1847, S. 332.

[10]) GRÜNWALD, K. A.: Z. Math. 12, 441 (1867).

[11]) MOST, R.: Z. Math. 16, 190 (1871).

[12]) v. SCHÄWEN: Programm des Gymnasiums zu Straßburg. 1881 u. 1882.

reelle Ordnung Gültigkeit hat, ohne also von den Ergebnissen oder Rechenregeln der gewöhnlichen Differentialrechnung auszugehen. Da es sich hierbei also nicht um eine bloße Ausdehnung der gewöhnlichen Differentialrechnung auf beliebige Indizes handelt, muß die Frage nach der Übereinstimmung in allen Einzelheiten mit dieser im Falle positiv-ganzzahliger Ordnung an die zweite Stelle treten.

Die Definition einer solchen Differentialrechnung durch Anlehnung an das Tangentenproblem, aus dem ja die Differentialrechnung seinerzeit entstand, erscheint wohl als aussichtslos, da ja eine geometrische Deutung eines höheren Differentialquotienten ganzzahliger Ordnung durch die Ausgangsfunktion nicht mehr direkt möglich ist. Der nächstfolgende Schritt ist aber die Darstellung des Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten, was ja bei der ersten Ordnung die analytische Erfassung des Tangentenproblems bedeutet. Bei den S. 401 erwähnten Versuchen bildeten jedoch die Differenzen und deren Quotienten nicht den Ausgangspunkt der Betrachtung, vielmehr entstanden dort u. a. den Differenzenquotienten ähnliche Ausdrücke bei der Erweiterung auf beliebige Indizes.

Von dieser Eigenschaft des Differentialquotienten, nämlich der Grenzwert des Differenzenquotienten zu sein, soll nun in dieser Arbeit ausgegangen werden.

II. Definition.

Wir fragen zunächst nach den Differenzen gebrochener Ordnung. Diese sind in der Literatur mehrfach behandelt worden[13]) und werden von K. Knopp eingeführt durch

$$\Delta^{\alpha} x_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{\alpha}{\nu} x_{n+\nu},$$

wo x_n eine Zahlenfolge und α eine beliebige reelle Zahl bedeuten. Wenn nun obige Reihe konvergiert, so sagt man, daß die Differenz α-ter Ordnung von x_n existiere. Im Falle der Divergenz ist die Differenz nicht vorhanden. Diese Definition der Differenz ist eine eindeutige und hat sich in vielen Anwendungen bewährt[14]). Darauf fußend gilt jetzt folgende

Definition: Es sei $f(x)$ eine vorgelegte Funktion, die mit einem x_0 für alle $x > x_0$ $(-\infty \leqq x_0 < \infty)$ erklärt ist, und α sei eine reelle Zahl. Dann sind die α-ten Differenzen dieser Funktion zum Abstande $h > 0$ gemäß obiger Definition

$$(1) \qquad \Delta^{\alpha} f(x), h = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p} \binom{\alpha}{p} f(x + p\,h)$$

für solche Werte von x, für die obige Reihe konvergiert.

Der Ausdruck

$$\frac{\Delta^{\alpha} f(x), h}{h^{\alpha}} = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p} \binom{\alpha}{p} f(x + p\,h)}{h^{\alpha}}$$

[13]) Chapman, S.: On non-integral orders of summability of series and integrals. Proc. London math. Soc. (2) **9**, 369 (1910). Andersen, A. F.: Studier over Cesaro's Summabilitetsmetode. Kopenhagen 1921. Knopp, K.: Mehrfach monotone Zahlenfolgen. Math. Z. **22**, 75 (1925).

[14]) Außer in den in Anm. 13 erwähnten Schriften auch: Th. Kaluza, Struktur und Eigenschaften monotoner Zahlenfolgen. Math. Z. **26**, 345 (1927) und ferner A. F. Andersen, Über die Anwendung von Differenzen nicht ganzer Ordnung in der Reihentheorie. Stockholm 1934.

ist sodann der Differenzenquotient α-ter Ordnung. Ist ferner die Funktion auch noch so beschaffen, daß der Grenzwert

$$(2) \qquad f^{[\alpha]}(x) = \lim_{h \to +0} \frac{\Delta^\alpha f(x), h}{h^\alpha} = \lim_{h \to +0} \frac{\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha}{p} f(x + p\,h)}{h^\alpha}$$

vorhanden ist, so soll $f(x)$ als *α-fach Δ-differenzierbar*[15]) bezeichnet werden für diejenigen Werte von $x > x_0$, für die (1) und (2) beide existieren. Sein Wert soll dann *die α-te Δ-Ableitung*[15]) genannt und mit $f^{[\alpha]}(x)$ oder $[f(x)]^{[\alpha]}$ bezeichnet[16]) werden.

Diese Ableitung ist damit als Grenzwert eines Differenzenquotienten definiert; die Abhängigkeit von einem willkürlichen Parameter ist ausgeschlossen. Die Existenz der Differenz, d. h. die Konvergenz der Reihe (1), ist notwendige Bedingung für das Bestehen der Ableitung. Die Differenz ist eine Funktion von x und h, sie wird deshalb mit $\Delta^\alpha f(x), h$ bezeichnet. Dabei ist h reell und positiv, es handelt sich bei (2) nur um den rechtsseitigen Limes.

Ist nun α gleich einer positiven ganzen Zahl n, so geht (2) über in

$$(3) \qquad f^{[n]}(x) = \lim_{h \to +0} \frac{\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} f(x + p\,h)}{h^n}.$$

Dieser Ausdruck stimmt bis auf den Faktor $(-1)^n$ und bis auf die Bemerkung, daß es nur der rechtsseitige Grenzwert ist, überein mit dem aus der gewöhnlichen Differentialrechnung bekannten Grenzwert des Differenzenquotienten n-ter Ordnung. Es folgt also, daß es aus zwei Gründen eintreten kann, daß zwar die so definierte Δ-Ableitung ganzzahliger Ordnung $f^{[n]}(x)$, nicht aber die gewöhnliche Ableitung $f^{(n)}(x)$ existiert. Denn diese war ja nicht als Grenzwert des n-ten Differenzenquotienten, sondern durch die n-fache Iteration des Differentiationsprozesses definiert und setzte fernerhin voraus, daß jeweils der links- und rechtsseitige Limes beide vorhanden sind und übereinstimmen. In beiden Fällen gilt aber das Umgekehrte: Aus der Existenz der gewöhnlichen Ableitung $f^{(n)}(x)$ folgt diejenige der Δ-Ableitung $f^{[n]}(x)$, und die Beziehung

$$(4) \qquad f^{[n]}(x) = (-1)^n f^{(n)}(x)$$

besteht nur unter der Bedingung, daß die rechte Seite existiert. Die Δ-Ableitung ist also nicht an die Existenz der gewöhnlichen Ableitung gebunden. Diese Feststellung entspricht durchaus der in der Einleitung gemachten Bemerkung über die Übereinstimmung bei positiv-ganzzahligem Index.

Ist $\alpha = 0$, so ist ersichtlich unter $f^{[0]}(x)$ die Funktion $f(x)$ selbst zu verstehen.

III. Bemerkungen und Beispiele.

a) Setzt man in (1) $\alpha = 1$, so wird[17])

$$\Delta f(x), h = f(x) - f(x + h),$$

---

[15]) Die Bezeichnung Δ-differenzierbar, Δ-Ableitung, usf. soll an die Entstehung aus den Δ-Differenzen erinnern; vgl. Anm. 17.

[16]) Eine Verwechslung mit der Bezeichnung $[\alpha]$ = größte ganze Zahl $\leqq \alpha$ ist ausgeschlossen, da letzteres in dieser Arbeit nicht auftritt.

und es fällt auf, daß bei der Definition des Leibnizschen Algorithmus demselben ja die Differenz[17])

$$\triangle f(x), h = f(x+h) - f(x)$$

zugrunde lag, d. h. mit entgegengesetztem Vorzeichen. So hat man entsprechend in der k-ten Stufe als Beziehung zwischen den beiden Differenzen

$$\varDelta^k f(x), h = (-1)^k \triangle^k f(x), h\,.$$

Es mag an dieser Stelle wohl als störend empfunden werden, daß von der für die gewöhnlichen Ableitungen gebräuchlichen Form der Differenz abgewichen wird, doch ergeben sich daraus große Vorteile, die bei gebrochener Ordnung zutage treten, so daß es sich lohnt, diese Abweichung in Kauf zu nehmen; es sei auch hier an die Bemerkung am Schluß der vorherigen Kapitels erinnert.

b) Bezüglich der Konvergenz der Reihe (1) läßt sich aussprechen der Satz[18]): *Die Reihe*

$$(1) \qquad \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha}{p} f(x+ph)$$

hat dasselbe Konvergenzverhalten wie die aus denselben Koeffizienten gebildete Dirichletsche Reihe

$$(5) \qquad \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)^{-(\alpha+1)} f(x+ph)\,,$$

wenn $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$

Man kann daher den Begriff der Konvergenzabszisse auf die Reihe (1) übertragen und sagen, daß es eine reelle Zahl λ, $-\infty \leqq \lambda \leqq \infty$, derart gibt, daß für alle $\alpha > \lambda$ die α-ten Differenzen von $f(x)$ (bei festem x) existieren, für $\alpha < \lambda$ dagegen nicht.

c) Aus der Definitionsgleichung (2) S. 403 ergibt sich sofort, wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei α-fach $\varDelta$-differenzierbare Funktionen sind, die $\varDelta$-Differenzierbarkeit deren Summe zur selben Ordnung, und es gilt

$$[\varphi(x) + \psi(x)]^{[\alpha]} = \varphi^{[\alpha]}(x) + \psi^{[\alpha]}(x)\,,$$

da ja nach Voraussetzung die beiden Reihen der Differenzen von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ konvergieren. Selbstverständlich folgt auch, daß ein konstanter Faktor bei dieser Differentiation erhalten bleibt.

d) Einige Beispiele:

1. $$f(x) = c = \text{const.}$$

$$\varDelta^\alpha c, h = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha}{p} c = 0, \text{ wenn } \alpha > 0, \text{ und damit } [c]^{[\alpha]} = 0\,.$$

Für $\alpha < 0$ ist demnach eine Konstante nicht $\varDelta$-differenzierbar, da ja dann die Reihe divergiert und also die Differenz nicht vorhanden ist.

2. $$f(x) = a^{-mx}, \qquad a > 1,\ x > 0,\ m > 0.$$

$$\varDelta^\alpha a^{-mx}. h = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha}{p} a^{-m(x+ph)} = a^{-mx}\left(1 - a^{-mh}\right)^\alpha,$$

$$\left[a^{-mx}\right]^{[\alpha]} = \lim_{h\to+0} a^{-mx}\left(\frac{1-a^{-mh}}{h}\right)^\alpha = a^{-mx}\, m^\alpha\, (\lg a)^\alpha\,.$$

---

[17]) Die Symbole $\varDelta$ und $\triangle$ für die verschiedenen Arten der Differenzenbildung sind entnommen aus: G. Lyra: Zur Theorie der G- und H-Summierbarkeit negativer Ordnung. Math. Z. **49**, 547 (1944).

[18]) Der Beweis dieses etwas abgeänderten Satzes findet sich bei E. Landau: Über die Grundlage und Theorie der Fakultätenreihen. Münch. Ber. **36**, 194 (1906).

Für die auftretenden Potenzen nicht ganzzahliger Ordnung sind die positiven Werte derselben zu nehmen, da diese durch die konvergente Reihe der Differenz eindeutig festgelegt sind.

3. $$f(x) = \sin x, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Stellt man den sin x durch Exponentialfunktionen dar, so bekommt man bei der Differenzbildung

$$\Delta^\alpha \sin x, h = \frac{1}{2i}\left\{\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\binom{\alpha}{p}e^{i(x+ph)} - \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\binom{\alpha}{p}e^{-i(x+ph)}\right\}.$$

Beide Reihen sind für $\alpha > 0$ konvergent, und man kann aus dem Ergebnis des vorigen Beispiels schließen:

$$[\sin x]^{[\alpha]} = \frac{1}{2i}\{e^{ix}(-i)^\alpha - e^{-ix}i^\alpha\},$$

woraus mit $i^\alpha = e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}$ und $(-i)^\alpha = e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}}$ folgt

$$[\sin x]^{[\alpha]} = \sin\left(x - \alpha\cdot\frac{\pi}{2}\right) \text{ mit } \alpha > 0, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Ganz ebenso ergibt sich

$$[\cos x]^{[\alpha]} = \cos\left(x - \alpha\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ \alpha > 0, \qquad -\infty < x < \infty.$$

IV. Die Δ-Differentiation negativer Ordnung.

Bei negativem Index kann man in einigen Fällen zu folgender Darstellungsform gelangen.

Satz 1: *Es sei $f(x)$ eine monoton abnehmende Funktion, die für alle $x > 0$ erklärt, positiv und α-fach Δ-differenzierbar ist, wo $-1 \leq \alpha < 0$. Dann gilt*

$$f^{[\alpha]}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty t^{-\alpha-1} f(x+t)\,dt \qquad \text{für } x > 0.$$

Beweis: Aus (2) S. 403 wird mit $\alpha = -\beta$, $0 < \beta \leq 1$

$$f^{[-\beta]}(x) = \lim_{h\to+0} h^\beta \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p+1}\binom{-\beta}{p+1} f(x + \overline{p+1}\cdot h), \tag{6}$$

wobei die Erhöhung des Summationsindex um 1 nichts ausmacht, da ja der Beitrag für $p = 0$ in (2), nämlich $h^\beta f(x)$, beim Grenzübergang ($h \to 0$) verschwindet. Da nun nach der Voraussetzung $f^{[-\beta]}(x)$ existiert, so konvergiert obige Reihe für alle $x > 0$ und nach dem Satz S. 404 auch die zugehörige Dirichletsche Reihe und damit die Reihe

$$\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)^{\beta-1} f(x + \overline{p+1}\cdot h), \qquad \text{für } x > -h. \tag{6a}$$

Weiter ist mit $f(t)$ auch $t^{\beta-1} f(t)$ monoton abnehmend, da ja $0 < \beta \leq 1$. Somit folgt, wenn man in (6a) $h = 1$ setzt, aus dem Integralkriterium[19]), daß das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^{\beta-1} f(x+t)\,dt$$

[19]) Knopp, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4. Auf., Berlin u. Heidelberg 1947, S. 303.

an der oberen Grenze konvergiert. An der unteren Grenze wird zwar der Integrand unendlich groß, aber das Integral konvergiert daselbst, weil $\beta - 1 > -1$ ist und $f(x+t)$ bei jedem festen $x > 0$ für alle $t \geqq 0$ beschränkt bleibt. Nun kann man in (6) die bekannte Beziehung

$$(-1)^{p+1}\binom{-\beta}{p+1}(p+1)^{1-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \varepsilon_p, \text{ wo } \varepsilon_p \to 0 \text{ mit } p \to \infty,$$

einsetzen und bei Beachtung der Konvergenz der Reihe (6a) schreiben

$$(7) \qquad f^{[-\beta]}(x) = \lim_{h \to +0}\left\{\frac{h^\beta}{\Gamma(\beta)}\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)^{\beta-1} f(x+\overline{p+1}\,h) + \right.$$
$$\left. + h^\beta \sum_{p=0}^{m-1}\varepsilon_p (p+1)^{\beta-1} f(x+\overline{p+1}\,h) + h^\beta \sum_{p=m}^{\infty}\varepsilon_p (p+1)^{\beta-1} f(x+\overline{p+1}\,h)\right\},$$

wobei das m so zu wählen ist, daß nach Vorgabe eines $\varepsilon > 0$ gilt:

$$|\varepsilon_p| < \varepsilon \text{ für jedes } p \geqq m.$$

In (7) ist das zweite Glied in der Klammer eine endliche Summe, die mit $h \to +0$ verschwindet. Für das dritte Glied gilt

$$(8) \qquad \left|h^\beta \sum_{p=m}^{\infty}\varepsilon_p (p+1)^{\beta-1} f(x+\overline{p+1}\,h)\right| < \varepsilon \left|h^\beta \sum_{p=m}^{\infty}(p+1)^{\beta-1} f(x+\overline{p+1}\,h)\right|,$$

Ferner besteht bei den über $f(x)$ gemachten Voraussetzungen die Beziehung[20]):

$$(9) \qquad \lim_{h \to +0} h \sum_{p=0}^{\infty}(h\,\overline{p+1})^{\beta-1} f(x+\overline{p+1}\,h) = \int_0^\infty t^{\beta-1} f(x+t)\,dt,$$

da ja die Existenz des Integrals an beiden Grenzen gezeigt wurde. Daher ist der im Betrag stehende Ausdruck auf der rechten Seite von (8) mit $h \to 0$ beschränkt, und damit wird schließlich aus (7)

$$f^{[-\beta]}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty t^{\beta-1} f(x+t)\,dt,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Setzt man hier $\beta = 1$, so wird

$$f^{[-1]}(x) = \int_x^\infty f(t)\,dt,$$

d. h. die „— 1-ste" Δ-Ableitung ist das zwischen den Grenzen x und ∞ genommene bestimmte Integral von $f(x)$. Es soll jedoch weiterhin nicht von einer „gebrochenen Integralrechnung" die Rede sein, vielmehr von *einer* Differentialrechnung, die durch den Ausdruck (2), S. 403, für alle reellen $-\infty < \alpha < \infty$ definiert ist.

Weiter kann man daraus einige hinreichenden Bedingungen für die Δ-Differenzierbarkeit einer Funktion ableiten. Durch Umkehrung des letzten Satzes bekommt man

Satz 2: *Ist $f(x)$ eine positive monoton abnehmende Funktion und existiert das Integral*

$$\int_0^\infty t^{-\alpha-1} f(x+t)\,dt,$$

[20]) Obwohl der Integrand bei $t = 0$ unendlich groß wird, verläuft der Beweis, da das Integral dort konvergiert (S. 406), ganz entsprechend wie etwa bei Polya-Szegö: Aufgabensammlung und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. 1, Berlin 1925, S. 41/199.

wo $-1 \leqq \alpha < 0$, *so ist die Funktion zu jedem Index* γ Δ-*differenzierbar, für den gilt*: $\alpha \leqq \gamma < 0$.

Beweis: Mit der Existenz für $\gamma = \alpha$ ist die Existenz des Integrals

$$\int_0^\infty t^{-\gamma-1} f(x+t)\,dt$$

auch für $0 > \gamma > \alpha$ sichergestellt. Nach (9) folgt daraus mit $\gamma = -\beta$ die Konvergenz der Reihe (6a) und gleichzeitig die Existenz des

$$\lim_{h\to+0} h \sum_{p=0}^{\infty} (h\,\overline{p+1})^{\beta-1} f(x+\overline{p+1}\,h),$$

womit unter Beachtung von (7) und (8) alles bewiesen ist.

Bekanntlich konvergiert

$$\int_0^\infty t^{-\alpha-1} f(x+t)\,dt$$

an der oberen Grenze, wenn

$$|t^{\nu}\cdot t^{-\alpha-1} f(x+t)| \leqq c \qquad (c > 0 \text{ konstant})$$

ist für beliebig große t und $\nu > 1$. Aus diesem Kriterium läßt sich herleiten der

Satz 3: *Ist* $f(x)$ *eine positive, monoton abnehmende Funktion und gilt ferner*

$$|x\cdot f(x)| \leqq c \qquad (c > 0)$$

für beliebig große x, *so ist* $f(x)$ Δ-*differenzierbar zu jedem Index* α, *für den* $-1 < \alpha < 0$ *gilt.*

Beweis: Wenn man in dem erwähnten Kriterium $\nu = 1+\varepsilon$ setzt, so wird mit $\alpha = -\beta$, $0 < \beta < 1$

$$|t^{\beta+\varepsilon} f(x+t)| \leqq c,$$

und es läßt sich stets ein $\varepsilon > 0$ angeben, so daß $\beta + \varepsilon < 1$ bleibt. Die Konvergenz von

$$\int_0^\infty t^{-\alpha-1} f(x+t)\,dt$$

an der unteren Grenze ergibt sich genau so wie S. 406 beim Beweis des Satzes 1. Mit der Existenz dieses Integrals ist der Satz unter Beachtung von Satz 2 bewiesen.

V. Anwendung auf total monotone Funktionen.

Wenn eine stetige, beliebig oft differenzierbare Funktion $f(x)$ für $x > 0$ der Bedingung

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geqq 0$$

für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ genügt, so wird $f(x)$ *total monoton*[21]) (vollmonoton) genannt. In Δ-Ableitungen ausgedrückt, lautet jetzt diese Bedingung

$$f^{[n]}(x) \geqq 0.$$

Eine solche Funktion läßt sich, wie in der in Anm. 21 zitierten Arbeit gezeigt ist, durch das Stieltjessche Integral

[21]) Hausdorff, F.: Summationsmethoden und Momentenfolgen. Math. Z. 9, 74 u. 280 (1921).

$$(10)\qquad f(x) = \int_0^1 u^x \, d\chi(u)$$

als Momentfunktion einer monotonen nicht abnehmenden Funktion $\chi(u)$, die beschränkt ist, darstellen. Diese „Belegungsfunktion“ ist sodann eindeutig bestimmt, wenn man die Anfangsbedingung $\chi(0) = 0$ und die Bedingung des arithmetischen Mittels $\chi(u) = \frac{1}{2}\chi(u+0) + \frac{1}{2}\chi(u-0)$ für die Sprungstellen der evtl. unstetigen Funktion $\chi(u)$ hinzunimmt[22]).

Es soll nun eine total monotone Funktion auf die Δ-Differenzierbarkeit hin untersucht werden. Es sei jetzt $\alpha > 0$ eine sonst beliebige reelle Zahl. Um nun die α-te Differenz von $f(x)$ zu bestimmen, hat man gemäß

$$(1)\qquad \Delta^\alpha f(x), h = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha}{p} f(x + p h)$$

zunächst aus (10)

$$f(x + p h) = \int_0^1 u^{x+ph} \, d\chi(u).$$

Wenn man nun weiter beide Seiten dieser Gleichung mit $(-1)^p \binom{\alpha}{p}$ multipliziert und darauf von $p = 0$ bis $p = \infty$ aufsummiert, so wird

$$(11)\qquad \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha}{p} f(x + p h) = \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^p \binom{\alpha}{p} u^{x+ph} \, d\chi(u).$$

Die Vertauschbarkeit des Σ-Zeichens mit dem $\int$-Zeichen auf der rechten Seite ergibt sich hier analog wie beim Riemannschen Integral aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe. Da nun $\alpha > 0$, $h > 0$, $0 \leq u \leq 1$, $|u^h| \leq 1$, so konvergiert

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{\alpha}{p} (u^h)^p = (1 - u^h)^\alpha$$

gleichmäßig in u und h. Man kann also schreiben:

$$(12)\qquad \Delta^\alpha f(x), h = \int_0^1 (1 - u^h)^\alpha u^x \, d\chi(u).$$

Bildet man nun den α-ten Differenzenquotienten und geht zur Grenze über,

$$(12\text{a})\qquad f^{[\alpha]}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta^\alpha f(x) h}{h^\alpha} = \lim_{h \to 0} \int_0^1 \left(\frac{1 - u^h}{h}\right)^\alpha u^x \, d\chi(u),$$

so kann man wieder den lim mit dem $\int$-Zeichen vertauschen, da es ja offenbar genügt, daß der Integrand gleichmäßig in u gegen die Grenzfunktion konvergiert. Dies läßt sich hier aus einem Satz von Dini[23]) schließen: Wenn in einem abgeschlossenen Bereich die Folge von stetigen Funktionen gegen eine stetige Grenzfunktion konvergiert und wenn die betrachtete Funktionenfolge eine monotone Folge bei jedem Argument bildet, so ist die Konvergenz im betrachteten Bereich eine gleichmäßige. Nun ist $\left(\frac{1 - u^h}{h}\right)^\alpha \cdot u^x$ eine im Bereich $0 \leq u \leq 1$ stetige Funktionenfolge, die gegen die im selben Bereich

[22]) Daselbst, S. 287.

[23]) Vgl. R. Courant: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. II. Berlin 1931, S. 89.

stetige Funktion $(-\lg u)^\alpha \cdot u^x$ konvergiert, da ja $x > 0$ ist, und zwar wächst sie bei abnehmendem h monoton für jedes Wertepaar u und x. Die Konvergenz dieser Funktionenfolge ist also eine gleichmäßige, und man kann schreiben

$$f^{[\alpha]}(x) = \int_0^1 (-\lg u)^\alpha u^x \, d\chi(u). \tag{13}$$

Es ergibt sich hieraus, daß eine total monotone Funktion zu jedem Index $\alpha > 0$ Δ-differenzierbar ist und ferner folgt aus (13), daß

$$\text{mit } f^{[n]}(x) \geqq 0 \text{ für alle } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ und } x > 0$$

auch ist $f^{[\alpha]}(x) \geqq 0$ für alle $\alpha \geqq 0$ und $x > 0$.

Weiter ergibt sich die Beziehung über die wiederholte Δ-Differentiation einer total monotonen Funktion:

$$[f^{[\alpha]}(x)]^{[\beta]} = f^{[\alpha+\beta]}(x), \qquad \alpha > 0, \ \beta > 0,$$

wobei das Symbol auf der linken Seite besagt, daß $f(x)$ zuerst zu einem Index α und darauf zu einem anderen Index β zu differenzieren ist. Dies folgt, wenn man den Ausdruck (13) für $f^{[\alpha]}(x)$ derselben Umformung unterwirft, wie es mit dem Ausdruck (10) für $f(x)$ zur Bildung der Ableitung geschah. Die Schlüsse, die dort zu den Gleichungen (12) und (13) führten, können auch hier angewendet werden, was ohne weiteres einzusehen ist. In der Formel (12a) ist $h \to 0$ statt $h \to +0$ gesetzt worden, was hier selbstverständlich möglich ist. Aus dem Obigen ergibt sich nun, daß, bei jedem reellen $\alpha > 0$, $f^{[\alpha]}(x)$ in gewöhnlichem Sinne differenzierbar ist und also insbesondere eine für alle $x > 0$ stetige Funktion von x darstellt.

Ferner läßt sich herleiten der

Mittelwertsatz α-ter Ordnung: *Ist $f(x)$ eine total monotone Funktion, so gibt es zu jedem $h > 0$, $x > 0$ und $\alpha > 0$ ein $0 < \vartheta < 1$ derart, daß die Beziehung*

$$\frac{\Delta^\alpha f(x), h}{h^\alpha} = f^{[\alpha]}(x + \alpha\vartheta h)$$

besteht.

Beweis: Aus dem gewöhnlichen Mittelwertsatz, angewandt auf $1 - u^x$ als Funktion von x an der Stelle $x = 0$, folgt

$$\frac{1 - u^h}{h} = -u^{\vartheta_1 h} \lg u, \tag{14}$$

wo $0 < \vartheta_1 < 1$ von h und von u abhängt.

Wenn man nun in den Ausdruck für den α-ten Differenzenquotienten gemäß (12)

$$\frac{\Delta^\alpha f(x), h}{h^\alpha} = \int_0^1 \left(\frac{1 - u^h}{h}\right)^\alpha \cdot u^x \, d\chi(u)$$

die Beziehung (14) einsetzt, so wird

$$\frac{\Delta^\alpha f(x), h}{h^\alpha} = \int_0^1 (-\lg u)^\alpha \cdot u^{\alpha\vartheta_1 h} u^x \, d\chi(u). \tag{15}$$

Für das letzte Integral besteht aber die Ungleichung

$$\int_0^1 (-\lg u)^\alpha u^{\alpha h} \cdot u^x \, d\chi(u) < \int_0^1 (-\lg u)^\alpha u^{\alpha\vartheta_1 h} u^x \, d\chi(u) < \int_0^1 (-\lg u)^\alpha u^x \, d\chi(u),$$

denn im ersten Ausdruck ist 1 statt ϑ_1, und im letzten ist 0 statt ϑ_1 gesetzt worden, und es ist $0 \leqq u \leqq 1$. Wegen (13) ist aber der erste Ausdruck gleich $f^{[\alpha]}(x + \alpha h)$ und der letzte gleich $f^{[\alpha]}(x)$, so daß mit (15) gilt

$$f^{[\alpha]}(x + \alpha h) < \frac{\Delta^\alpha f(x), h}{h^\alpha} < f^{[\alpha]}(x).$$

Da $f^{[\alpha]}(x)$ stetig ist, wird jeder Funktionswert zwischen $f^{[\alpha]}(x + \alpha h)$ und $f^{[\alpha]}(x)$ angenommen, so daß man setzen kann

$$\frac{\Delta^\alpha f(x), h}{h^\alpha} = f^{[\alpha]}(x + \alpha \vartheta h),$$

wo ϑ ein passender Wert ist zwischen 0 und 1. Damit ist der Satz bewiesen.

Abschließend soll noch ein Beispiel für die Differentiation einer total monotonen Funktion gezeigt werden. Der bequemeren Rechnung halber wird in

$$(10) \qquad f(x) = \int_0^1 u^x \, d\chi(u)$$

substituiert[24]) mit $u = e^{-v}$. Mit $d\chi(u) = -e^{-v} d\psi(v)$ erhält man

$$(16) \qquad f(x) = \int_0^\infty e^{-v(x+1)} d\psi(v).$$

Führt man dasselbe auch in (13) ein, so wird:

$$(17) \qquad f^{[\alpha]}(x) = \int_0^\infty v^\alpha e^{-v(x+1)} d\psi(v).$$

Nun soll als Beispiel die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^\nu}, \quad \text{wo } \nu > 0, \quad x \geqq 0,$$

betrachtet werden. Gleichung (16) lautet dann

$$\frac{1}{(x+1)^\nu} = \int_0^\infty e^{-v(x+1)} d\psi(v).$$

Es müßte jetzt die Funktion $\psi(v)$ ermittelt werden. Die Lösung dieses Momentenproblems[25]) ist hier sehr einfach, sie lautet nämlich

$$\psi(v) = \frac{v^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \quad d\psi(v) = \frac{v^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} dv,$$

von deren Richtigkeit man sich durch Einsetzen überzeugen kann. Gleichung (17) liefert dann

$$\left[\frac{1}{(x+1)^\nu}\right]^{[\alpha]} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty v^{\alpha+\nu-1} e^{-v(x+1)} dv.$$

Substituiert man hier noch mit $v(x+1) = w$, so wird

$$\left[\frac{1}{(x+1)^\nu}\right]^{[\alpha]} = \frac{1}{\Gamma(\nu)(x+1)^{\alpha+\nu}} \int_0^\infty w^{\alpha+\nu-1} \cdot e^{-w} dw.$$

Rechts steht aber das EULERsche Γ-Integral, und die Lösung lautet somit

$$\left[\frac{1}{(1+x)^\nu}\right]^{[\alpha]} = \frac{\Gamma(\alpha+\nu)}{\Gamma(\nu)} (1+x)^{-\nu-\alpha}.$$

[24]) Vgl. KALUZA, TH.: Entwickelbarkeit von Funktionen in DIRICHLETsche Reihen. Math. Z. 28, 203 (1938).

[25]) Vgl. O. PERRON: Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1929 und auch die S. 407 zitierte Arbeit von F. HAUSDORFF.

(Eingegangen am 21. September 1949.)

Math. Annalen, Bd. 122, S. 411—423 (1951).

Über Nullgebilde analytischer Funktionen zweier Veränderlichen, die in singulären Stellen münden.

I. Teil. Durch ganze Potenzen asymptotisch approximierbare Nullgebilde

Von

Georg Lockot † und Hermann Schmidt in Braunschweig[1]).

Einleitung.

Wir führen hier die Untersuchung des von dem einen von uns in [4] § 1, § 3 (s. Schriftenverzeichnis) in Angriff genommenen Fragenkreises fort. Wie dort handelt es sich um Nullgebilde $y = y(x)$ einer gegebenen analytischen Funktion $f(x, y)$, für die (bei geeigneter Grenzwertsdefinition) $y \to y_0$, falls $x \to x_0$, wobei aber die gegebene Stelle (x_0, y_0) eine *singuläre Stelle* von $f(x, y)$ sein darf, so daß nicht, wie in den üblichen Fällen, der Weierstrasssche Vorbereitungssatz anwendbar zu sein braucht. Die Aufgabe, solche Nullgebilde aufzuweisen und explizit bzw. asymptotisch darzustellen, wird a. a. O. für einige allgemeine Fälle gelöst. Insbesondere wird dort in § 3 (bei der Normierung $x_0 = 0$, $y_0 = 1$)[2]) $f(x, y)$ durch eine Potenzreihe der Form

$$(1) \qquad \sum_0^\infty x^\nu f_\nu(y)$$

gegeben, die auf Grund der gemachten Voraussetzungen in einem Zylindergebiet

$$(2) \qquad \mathfrak{G} = \{|x| < \xi,\ y \in \mathfrak{T}\}, \qquad (\xi > 0 \text{ fest!})$$

konvergiert, wo $\mathfrak{T}$ einen in $|y| < 1$ gelegenen Winkelraum mit dem Scheitel 1 bedeutet. Das Gebiet gleichmäßiger Konvergenz einer solchen Potenzreihe ist nun aber ein vollkommener Hartogsscher Körper (vgl. Behnke-Thullen [1] II § 4, III § 4), und ein solcher braucht, auch wenn seine y-Projektion einen Winkelraum der Art $\mathfrak{T}$ umfaßt, keineswegs ein Gebiet vom Typ $\mathfrak{G}$ zu enthalten. Wir befreien uns daher jetzt von dieser Einschränkung und lassen zu, daß der Konvergenzradius von (1) mit $y - y_0$ gegen Null geht. Ferner kann, allgemeiner als früher, an die Stelle von $\mathfrak{T}$ ein Winkelraum beliebiger Stellung, oder auch das *Zwischengebiet zweier Kurven* treten, die sich berühren dürfen, wenn auch nicht beliebig stark (vgl. Annahme II (c), unten § 2). Das Hauptergebnis von [4], § 3, der dortige Satz 2, läßt sich dann sinngemäß unter einer Zusatzannahme übertragen, die im wesentlichen darauf hinauskommt, daß der

---

[1]) Die Abhandlung geht im Kern auf den ersten Hauptteil einer von G. Lockot auf Grund meiner Anregungen gefertigten, von der math.-nat. Fakultät der Universität Jena 1941 genehmigten Dissertation zurück, die später in gemeinsamen Besprechungen weitergeführt und, nachdem Herr Lockot den Nöten der Nachkriegszeit zum Opfer gefallen war, von mir nochmals umgearbeitet wurde. (H. S.)

[2]) Diese Wahl von x_0, y_0 ist natürlich willkürlich und in [4] hauptsächlich wegen ihrer Zweckmäßigkeit in dem Sonderfall getroffen, daß (x_0, y_0) auf dem Rand des Gebietes absoluter Konvergenz einer Potenzreihe in $(x - x_0, y - y_1)$ liegt, worauf dann die Normierung $x_0 = y_1 = 0$, $y_0 = 1$ naheliegt. Im folgenden wird abweichend $x_0 = y_0 = 0$ angenommen.

Konvergenzradius von (1) mit $y - y_0$ nicht allzu schnell gegen 0 gehen soll (Satz I, II; Vor. D). Alsdann verläßt die durch ein formal berechenbares, mutmaßliches Näherungspolynom $y = P(x)$ erklärte analytische Fläche wenigstens für eine Teilumgebung von $x = x_0$ das Konvergenzgebiet von (1) nicht, und es erweist sich in der Tat $P(x)$ als asymptotische Näherung für eine Lösung. Entsprechend gibt es in allgemeineren Fällen asymptotische Näherungen vom PUISEUXschen Typ, die also nach gebrochenen Potenzen fortschreiten, doch wird hierauf in dieser Arbeit nicht mehr eingegangen.

§ 1. Allgemeine Grundlagen. Hilfssätze über asymptotische Darstellungen.

Ist $\mathfrak{Z}$ eine Punktmenge der komplexen Zahlebene mit dem (endlichen) Häufungspunkt z_0, so bezeichnen wir als $\mathfrak{Z}$-Umgebung von z_0 den Durchschnitt $\mathfrak{Z}_r$ von $\mathfrak{Z}$ mit einer gewöhnlichen Kreisumgebung $|z - z_0| < r$ und erklären dann mit diesem Umgebungsbegriff die Bezeichnungen lim, o, O und den Begriff der „asymptotischen Darstellung k-ter Ordnung" wie üblich (vgl. [3] § 1). Bei dieser letzteren Ausdrucksweise ist ein fest vorgegebenes „Skalenstück" $\varphi_\nu(z)$ ($\nu = 0, 1, \ldots k$) zugrundegelegt zu denken ($\varphi_\nu(z) \neq 0$ in $\mathfrak{Z}$, $\varphi_{\nu+1}(z) = o(\varphi_\nu(z))$, und sie soll besagen, daß $r_k(z) = o(\varphi_k(z))$, wenn $r_k(z) = f(z) - \sum\limits_{\nu=0}^{k} a_\nu \varphi_\nu(z)$ ($f(z)$ in einer $\mathfrak{Z}$-Umgebung von z_0 erklärt); hierfür schreiben wir auch $f(z) \underset{k}{\sim} \sum\limits_{0}^{k} a_\nu \varphi_\nu(z)$. Die Beiwerte a_ν sollen in dieser Arbeit von z unabhängig sein, dürfen aber von einem Parameter w abhängen; falls dann r_k/φ_k gleichmäßig in w gegen Null strebt, heißt auch die asymptotische Darstellung gleichmäßig (glm.) und wir schreiben $\underset{k}{\approx}$ statt $\underset{k}{\sim}$.

Hilfssatz 1. Es sei $\mathfrak{Z}$ ein Bereich der z-Ebene, jeder Punkt dessen mit dem Nullpunkt durch einen (abgesehen von $z = 0$) ganz in $\mathfrak{Z}$ verlaufenden Weg C von einer Länge $L < M|z|$ verbindbar ist ($M > 0$, fest). Ist dann

1) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!} = a_\nu$ für $0 \leqq \nu \leqq l$ vorhanden, so gilt für $z \to 0$ $r_l(z) = f(z) - \sum\limits_{\nu=0}^{l} a_\nu z^\nu = o(z^l)$. Ist

2) überdies $f^{(l+1)}(z) = O(z^\beta)$, $\beta > -1$, so gilt schärfer $r_l(z) = O(z^{l+1+\beta})$ entsprechend mit O statt o.

Der Beweis ergibt sich unter Benützung der Tatsache, daß

$$\operatorname*{Max}_{t \in C} |z - t| \leqq L \text{ und } \operatorname{Max} \left| \frac{z-t}{z} \right| \leqq \frac{L}{|z|} < M,$$

ähnlich wie in [4] S. 545 aus der TAYLORschen Formel mit Integralrestglied.

Hilfssatz 2. Wenn $f(z, w)$ für $z \in \mathfrak{Z}$ erklärt und in $|w| < R$ regulär ist, ferner glm. in w die Darstellung gestattet

$$f(z, w) \underset{k}{\approx} w^n + \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu(w) z^\nu \qquad (z \to 0 \text{ in } \mathfrak{Z}),$$

dann hat die Gleichung $f = 0$ bei geeigneter Wahl von r, $R_1 \leqq R$ für $z \in \mathfrak{Z}_r$

genau n Lösungen w_i mit $|w_i| < R_1$ und für jede in $|w| < R_1$ reguläre Funktion $\psi(w)$ gilt mit konstanten b_ν:

$$\sum_{i=1}^{n} \psi(w_i) \underset{k}{\sim} \sum_{0}^{k} b_\nu z^\nu.$$

Ist $\mathfrak{Z}$ ein Gebiet und $f(z, w)$ außerdem für $z \in \mathfrak{Z}$ regulär, so ist auch $\sum_{j=1}^{n} \psi(w_j(z))$ für $z \in \mathfrak{Z}_r$ regulär.

Dies ist ein Sonderfall des Satzes 8, [3] 642/3, mit einer kleinen aus den Integraldarstellungen fast unmittelbar folgenden Ergänzung für den Fall einer auch in z analytischen Funktion.

§ 2. Problemstellung und Entwicklung eines formalen Lösungsverfahrens.

Wir definieren den Bogen

$$\mathfrak{C}_t = \{|y| = t, \ |\text{arc}\, y - \beta| \leqq \gamma\}$$

sowie die Bereiche

$$\mathfrak{Y}_R = \{|y| < R, \ |\text{arc}\, y - \beta| \leqq \gamma\}$$

$$\mathfrak{Y}_{t,R} = \{t \leqq |y| < R, \ |\text{arc}\, y - \beta| \leqq \gamma\}.$$

Um möglichst viele Fälle zu erfassen, machen wir über β und γ einmal eine einfache und einmal eine allgemeinere Annahme.

Annahme I. β, γ const., $0 < \gamma \leqq \pi$; $\mathfrak{Y}_R$ ist ein Winkelraum (vgl. Abb. 1).

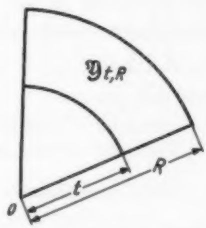


Abb. 1

Annahme II. β und γ sind für $0 < t \leqq R$ stetig differenzierbare Funktionen von t, derart, daß

(a) $\qquad \gamma \to 0$ monoton für $t \to +0$.

(Der Fall einer positiven Winkelöffnung in 0 kann mit Annahme I behandelt werden.)

(b) $\qquad |\beta'(t)| \leqq \gamma'(t)$.

Aus (b) folgt

(b′) $\qquad \beta'(t) - \gamma'(t) \leqq 0 \leqq \beta'(t) + \gamma'(t)$;

ist daher $0 < \tau < t$, so gilt weiter

(b″) $\qquad |\beta(t) - \beta(\tau)| \leqq \gamma(t) - \gamma(\tau)$;

daher existiert nach (a) und der Cauchyschen Konvergenzbedingung

$$\lim_{t \to 0} \beta(t) = \beta(0) = \lim_{t \to 0} (\beta(t) \pm \gamma(t)).$$

Die beiden Berandungsbogen $y = t \cdot e^{i(\beta \pm \gamma)}$ münden also mit der gleichen Tangente in 0 ein und liegen wegen (b′) auf entgegengesetzten Seiten derselben. Ferner möge $\mathfrak{Y}_R$ gegen 0 nicht zu schnell schmal werden: es sei nämlich

(c) $\qquad \gamma > c \cdot t^{\Delta}$

mit noch festzulegendem $c > 0$, $\Delta > 0$. Schließlich soll $t \cdot \left|\frac{d\beta}{dt}\right|$ für $t \to 0$ beschränkt bleiben:

(d) $\qquad t \left|\frac{d\beta}{dt}\right| < N.$

Man sieht leicht, daß $\mathfrak{Y}_R$ den Bedingungen des Hilfssatzes 1 für $\mathfrak{Z}$ genügt. Als Integrationsweg C kann zu gegebenem y_0 stets folgender Weg genommen werden:

I. $|y| = |y_0| = t_0$, arc $y_0 \geqq$ arc $y \geqq \beta(t_0)$ (bzw. $\leqq, \leqq$); dieser Weg liegt nach Definition in $\mathfrak{Y}_R$.

II. $t_0 \geqq |y| > 0$, arc $y = \beta(t)$. Die Länge von Teil I ist: $L_1 \leqq \pi t_0$; die Länge von Teil II ist wegen (d):

$$L_2 = \int_0^{t_0} \sqrt{1 + t^2 \beta'^2(t)}\, dt < \int_0^{t_0} \sqrt{1 + N^2}\, dt = M' t_0.$$

Für die Gesamtlänge L gilt also: $L < (\pi + M') t_0 = M t_0$. Daher ist der Hilfssatz 1 auf $\mathfrak{Y}_R$ anwendbar.

Die der Annahme II genügenden Größen bezeichnen wir mit $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\mathfrak{C}}_t$, $\tilde{\mathfrak{Y}}_R$, $\tilde{\mathfrak{Y}}_{t,R}$ und beziehen den Grenzübergang $y \to 0$ stets auf Gebiete wie $\mathfrak{Y}_R$ oder $\tilde{\mathfrak{Y}}_R$. (Das Zeichen $\sim$ in $\tilde{\gamma}$, sowie späterhin in $\tilde{\delta}_\nu$, $\tilde{\varrho}_\nu$, $\tilde{\eta}_\nu$ und ähnlichen Symbolen besage stets, daß die betr. Größe für $t \to 0$ nach 0 geht.)

Wir betrachten jetzt die (formale) Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu f_\nu(y) \tag{1}$$

($f_\nu(y)$ regulär in $\mathfrak{Y}_{R_0}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{Y}}_{R_0}$), die wir auf Nullgebilde untersuchen wollen. Wir setzen, sofern vorhanden,

$$\lim_{y \to 0} f_\nu^{(\lambda)}(y) = A_{\nu\lambda}$$

und nehmen an:

Vor. (A): Es existiere und sei $A_{\nu 0} = 0$ für $\nu < n_1$, $A_{n_1 0} \neq 0$, $A_{01} \neq 0$.

Vor. (B): Die $A_{\nu\lambda}$ mögen noch für $0 < \nu + n_1 \lambda \leqq k$ existieren (k fest, $\geqq n_1$).

Auf Grund dieser Vor. läßt sich zunächst aus der endlichen Summe $\sum_0^k{}' x^\nu f_\nu(y)$ durch bestimmte formale Operationen ein Polynom k-ten Grades $y = y_0(x)$ ermitteln, von dem man auf Grund der sogleich zu schildernden Art der Bestimmung *hoffen darf*, daß es unter gewissen Bedingungen eine Annäherung für eine wirkliche Lösung von $f(x, y) = 0$ ist. In § 3 werden die hierzu erforderlichen Bedingungen untersucht.

Wir beschreiben im weiteren zwei solche formale Lösungsverfahren, von denen das erste nur im einfachsten Fall anwendbar ist.

Beide beruhen darauf, daß $\sum_0^k x^\nu f_\nu(y)$ durch das Polynom

$$P_0(x, y) = \sum_{\nu=0}^{k}{}' \sum_{\lambda=0}^{[l_\nu]}{}' \frac{A_{\nu\lambda}}{\lambda!} x^\nu y^\lambda$$

ersetzt wird. $\left(l_\nu = \dfrac{k - \nu}{n_1}\right)$.

1. Setzt man, wie in [4] § 3, y_0 mit unbestimmten Koeffizienten an:

$$y_0 = C_{n_1} x^{n_1} + C_{n_1+1} x^{n_1+1} + \cdots + C_k x^k,$$

so gibt Nullsetzen der Koeffizienten bei x^ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots k$) im Polynom $P_0(x, y_0(x))$ genau ein Lösungssystem (C_μ). („Methode des Koeffizientenvergleichs k-ter Ordnung“).

2. Wir denken uns alle Wertepaare (ν, λ), für die $A_{\nu\lambda} \neq 0$ existiert, als Gitterpunkte in die (ν, λ)-Ebene eingetragen, wobei die λ-Achse nach rechts, die ν-Achse nach oben weisen möge. Wir können nun, wie es bei Polynomen zweier Veränderlicher üblich ist, die „unteren Stützsehnen" zu diesem Gitter zeichnen[3]). Ihre Gesamtheit bildet in gewissem Sinne das Puiseuxdiagramm von $f(x, y)$ für $x = 0$, $y \to 0$. In unserem Fall besteht dies wegen Vor. (A) aus einer einzigen Sehne von der „Länge" 1 (= Projektion auf die λ-Achse, s. Abb. 2). Jetzt läßt sich an $P_0(x, y)$ das bekannte Puiseuxsche Verfahren der Koeffizientenermittlung durchführen, das wir ausführlich bringen, da später auf jeden einzelnen Schritt Bezug genommen wird.

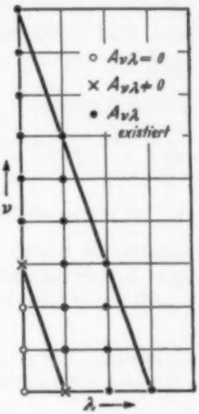


Abb. 2
$n_1 = 3, k = 9$

Setzt man

$$y = w_1 x^{n_1}, \tag{3a}$$

so wird

$$P_0(x, y) = \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{\lambda=0}^{[l\nu]} \frac{A_{\nu\lambda}}{\lambda!} x^{\nu + n_1\lambda} w_1^{\lambda} =$$
$$= x^{n_1} \cdot A_{01}(w_1 - c_1) + x^{n_1} \sum_{\mu=1}^{k-n_1} x^{\mu} h_{1,\mu}(w_1)$$

mit

$$h_{1,\mu}(w_1) = \sum_{\lambda=0}^{\left[\frac{\mu}{n_1}\right]+1} A_{\mu+n_1-n_1\lambda,\lambda} \cdot \frac{w_1^{\lambda}}{\lambda!}, \quad c_1 = -\frac{A_{n_1,0}}{A_{01}}.$$

Zwecks Fortsetzung des Verfahrens muß das Puiseuxdiagramm von

$$\frac{P_0(x, w_1^{n_1})}{A_{01} x^{n_1}} = P_1(x, w_1) = w_1 - c_1 + \frac{1}{A_{01}} \sum_{\mu=1}^{k-n_1} x^{\mu} h'_{1,\mu}(w_1)$$

im Punkte $x = 0$, $w_1 = c_1$ untersucht werden. Es sind zwei Fälle möglich:

1. $P_1(x, w_1)$ ist durch $w_1 - c_1$ teilbar, was wir zunächst ausschließen.

2. P_1 hat wenigstens ein Glied $x^p (w_1 - c_1)^0$; das Diagramm hat dann stets die Länge 1. Seine Steigung (von rechts nach links) sei $n_2 - n_1$; sie ergibt sich wegen

$$h_{1,\mu}(w_1) = h_{1,\mu}(c_1) + (w_1 - c_1) \cdot h_{1,\mu}(c_1) + \cdots$$

aus:

$$h_{1,\mu}(c_1) = 0 \text{ für } \mu < n_2 - n_1, \quad h'_{1,n_2-n_1}(c_1) \neq 0.$$

Die entsprechende Substitution lautet

$$w_1 - c_1 = w_2 x^{n_2 - n_1}.$$

Das hiermit transformierte Polynom P_1 ist durch $x^{n_2 - n_1}$ teilbar; der Quotient

$$P_1(x, c_1 + w_2 x^{n_2 - n_1}) \cdot x^{-n_2 + n_1} = P_2(x, w_2)$$

läßt sich in der Form schreiben:

$$P_2(x, w_2) = w_2 - c_2 + \frac{1}{A_{01}} \sum_{\mu=1}^{k-n_2}{}' h_{2,\mu}(w_2) x^{\mu} + o(x^{k-n_2}).$$

---

[3]) Untere Stützsehne ist jede Gerade, auf der mindestens zwei Gitterpunkte liegen, während für alle unter ihr liegenden Punkte mit ganzzahligen, nicht negativen Koordinaten $A_{\nu\lambda} = 0$ ist.

wobei $c_2 \neq 0$, die $h_{2,\mu}(w_2)$ Polynome $\left(\text{höchstens } \left(\left[\frac{\mu}{n_2}\right]+1\right)\text{-ten Grades}\right)$ sind, und die bei der Umrechnung auftretenden höheren x-Potenzen durch $o\,(x^{k-n_2})$ erfaßt sind.

An P_2 läßt sich obige Überlegung wiederholen. Enthält P_2 ein Glied $(w_2 - c_2)^0\, x^0$, so hat sein Diagramm im Punkte $x = 0$, $w_2 = c_2$ die Länge 1. Ihm entspreche die Transformation

$$w_2 - c_2 = w_3\, x^{n_3 - n_2},$$

usw. Das Verfahren wird vermittels

(3b) $$w_q - c_q = w_{q+1}\, x^{n_{q+1} - n_q}$$

jeweils fortgesetzt, wenn nur

(4) $$P_q(x, w_q) = w_q - c_q + \frac{1}{A_{01}} \sum_{\mu=1}^{k-n_q} h_{q,\mu}(w_q)\, x^{\mu} + o\,(x^{k-n_q})$$

$\left(h_{q,\mu}(w_q)\right.$ sind Polynome höchstens $\left.\left(\left[\frac{\mu}{n_q}\right]+1\right)\text{-ten Grades}\right)$ noch ein Glied mit $(w_q - c_q)^0\, x^{n_{q+1}-n_q}$ enthält. Nach endlich vielen Schritten, spätestens für $n_q = k$, tritt dies nicht mehr ein, etwa für $q = s$. Wir geben die Rechenvorschrift: In diesem Falle ist

$$w_s = c_s$$

zu setzen. — Die aneinandergereihten Substitutionen (3a), (3b) ergeben jetzt als mutmaßliche Näherungslösung

$$y_0(x) = c_1\, x^{n_1} + c_2\, x^{n_2} + \cdots + c_s\, x^{n_s},\ n_s \leqq k.$$

Man überzeugt sich, daß die Koeffizienten und Exponenten mit den unter 1. gefundenen übereinstimmen.

Wir legen den weiteren Untersuchungen das zweite Verfahren zugrunde.

§ 3. Existenzbedingungen für Nullgebilde im Hauptfall. Satz I und II.

Unter welchen Bedingungen definiert nun die Reihe (1) eine Funktion $f(x, y)$, die ein in $x = 0$, $y = 0$ mündendes, durch $y_0(x)$ asymptotisch dargestelltes Nullgebilde besitzt? Um dies entscheiden zu können, müssen Annahmen über den vernachlässigten Reihenrest gemacht werden.

Vor. (C)[4]. Für $\nu < k$, $l_\nu = \dfrac{k-\nu}{n_1}$ nicht ganz sei

$$f_\nu^{([l_\nu]+1)}(y) = o\,(|y|^{l_\nu - [l_\nu] - 1}).$$

Die weiteren Voraussetzungen und Aussagen dieses Paragraphen lauten für $\mathfrak{Y}_{R_0}$ und $\tilde{\mathfrak{Y}}_{R_0}$ völlig entsprechend, je nachdem, ob Annahme I oder II zu Grunde gelegt ist. Sie mögen daher nur für $\mathfrak{Y}_{R_0}$ gemäß Annahme I formuliert werden.

Es werde definiert (vgl. Abb. 1):

$$\overline{\operatorname{fin}}_{y \in \mathfrak{Y}_{t, R_0}} |f_{k+\nu}(y)| = H_\nu(t).$$

[4]) Entspricht Vor. 2a in [4] § 3.

$H_\nu(t)$ ist eine für $t \to 0$ monoton wachsende Funktion. Sei ferner

$$T(t) = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{H_\nu(t)}}$$

mit den üblichen Festsetzungen im Falle eines Auftretens von Null oder Unendlich im Nenner.

T ist der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} x^\nu H_\nu(t)$ in x, und *wenn für* $0 < t < R_0$ $T(t) > 0$ *ausfällt*, ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x^\nu f_\nu(y) = f(x, y)$ jedenfalls für $y \in \mathfrak{Y}_{R_0}$, $|x| < T(|y|)$ erklärt.

$T(t)$ nimmt für $t \to +0$ monoton ab. An jeder Stelle ist daher ein rechts- und ein linksseitiger lim vorhanden. Wir wollen, soweit $T(t-0) \neq T(t)$ sein sollte, die Definition abändern und setzen $T(t) = T(t-0)$, womit also T linksseitig stetig geworden ist.

Dann läßt sich zeigen:

Ist $T(t) > 0$ für $0 < t < R_0$, so konvergiert (1) glm. in der Umgebung jedes Punktes (x, y), für den $y \in \mathfrak{Y}_{R_0}$, $|x| < T(|y|)$, und stellt daher dort eine reguläre Funktion dar.

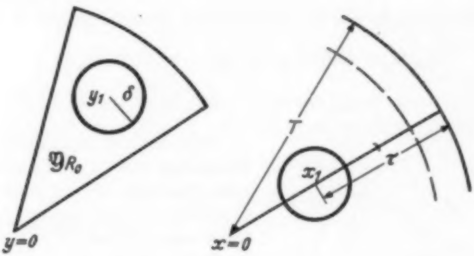


Abb. 3.

Beweis (s. Abb. 3).

Sei $y_1 \in \mathfrak{Y}_{R_0}$, $|y_1| = t_1$, $|x_1| < \mathsf{T} = T(t_1)$, $\mathsf{T} - |x_1| = \tau$; wegen der linksseitigen Stetigkeit von T gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$T(t_1 - \delta) \geq |x_1| + \frac{3}{4}\tau .$$

Dann ist für $|y - y_1| < \delta$

$$|f_{k+\nu}(y)| \leq H_\nu(t_1 - \delta) \leq \frac{1}{\left(T(t_1 - \delta) - \frac{\tau}{4}\right)^\nu} \leq \frac{1}{\left(|x_1| + \frac{\tau}{2}\right)^\nu},$$

wenn nur $\nu > \nu_0\left(\frac{\tau}{4}\right)$, und für $|x - x_1| < \frac{\tau}{4}$ wird

$$|x^\nu f_{k+\nu}(y)| \leq \left(\frac{|x_1| + \frac{\tau}{4}}{|x_1| + \frac{\tau}{2}}\right)^\nu,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Offenbar ist $f(x, y)$ regulär im Gebiet $\mathfrak{M} = \{y \in \mathfrak{Y}_{R_0}, |x| < T(|y|)\}$.

Der einfache Nachweis für die Gebietseigenschaft von $\mathfrak{M}$ sei unterdrückt.

Wir wollen jetzt durch Annahmen über die $H_\nu(t)$ schärfere Voraussetzungen für $T(t)$ einführen, die insbesondere die Posivität von $T(t)$ für $t < t_0 \leqq R_0$ zur Folge haben.

Vor. (D). Es gebe eine Zahl $\vartheta > |c_1|^{-\frac{1}{n_1}}$, so daß für $t \to +0$

$$\vartheta^\nu H_\nu(t) = o\left(t^{-\frac{\nu}{n_1}}\right) \text{ glm. in } \nu.$$

Hieraus folgt: für $t \leqq t_0$ sind die $\vartheta^\nu t^{\frac{\nu}{n_1}} H_\nu(t)$ glm. beschränkt, und es ist

$$T(t) \geqq \vartheta\, t^{\frac{1}{n_1}}. \tag{5}$$

Es sei bereits $R_0 = t_0$ gewählt.

Wir führen noch folgende *Bezeichnungen* ein:

$|x| = r$, $\operatorname{arc} c_\nu = \varphi_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ (vgl. (3a), (3b)), $\alpha_j = \frac{1}{n_1}(\beta - \varphi_1 + 2\pi j)$'

$$\mathfrak{X}^{(j)}_{\bar r \eta} = \{0 < |x| < \bar r, |\operatorname{arc} x - \alpha_j| < \eta\}$$

(der obere Index j werde nur im Bedarfsfalle geschrieben),

$$\mathfrak{K}_\nu = \{|w_\nu - c_\nu| < \varrho_\nu\} \qquad (\varrho_\nu < |c_\nu|),$$

$$\varrho_\nu = |c_\nu| \sin \delta_\nu \qquad \left(0 < \delta_\nu < \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(vgl. Abb. 4).}$$

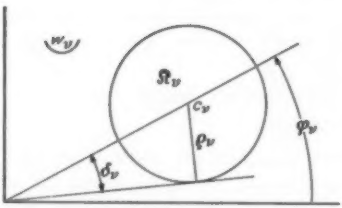


Abb. 4.

Für die bei Annahme II (§ 2) auftretenden, diesen entsprechenden Größen und Bereiche ist es zweckmäßig, einen Parameter τ als unabhängige Veränderliche einzuführen, $0 < \tau < \tau_0$ mit noch zu bestimmendem τ_0.

Es sei

$$\tilde{\mathfrak{K}}_1(\tau) = \{|w_1 - c_1| < \tilde\varrho_1(\tau)\}$$

mit $\tilde\varrho_1 \to 0$ für $\tau \to 0$ auf noch festzulegende Weise, sowie $\tilde\varrho_1 = |c_1| \cdot \sin \tilde\delta_1$.

Setzen wir noch $\tilde\alpha_j(\tau) = \frac{1}{n_1}(\tilde\beta(\tau) - \varphi_1 + 2\pi j)$ und

$$\tilde{\mathfrak{C}}_\tau^{(j)} = \{|x| = r(\tau), |\operatorname{arc} x - \alpha_j(\tau)| < \tilde\eta(\tau)\}, \; r_0 = \tilde r(\tau_0),$$

— wobei $\tilde r(\tau)$ für $0 < \tau < \tau_0$ das Intervall $(0, r_0)$ gerade einmal durchmißt so ist die Vereinigungsmenge

$$\{\tilde{\mathfrak{C}}_\tau^{(j)}\}_{0 < \tau < \tau_0} = \mathfrak{X}^{(j)}_{r_0, \tilde\eta}$$

das Analogon zu $\mathfrak{X}^{(j)}_{r_0, \eta}$.

Satz I. Unter *Vor.* (*A*) — (*D*) mit *Annahme I* (S. 413) gibt es bei geeignetem positivem $\bar r$ und $\delta_1 < \gamma$ zu jedem j $(= 1, 2 \ldots n_1)$ genau eine für $x \in \mathfrak{X}_{\bar r \eta}$ reguläre Lösung $y = y_j(x)$ der Gleichung $f(x, y) = 0$ mit $w_1 \in \mathfrak{K}_1$

($\varrho_1 = |c_1| \cdot \sin \delta_1$), $n_1 \eta + \delta_1 = \gamma$, für die gilt

$$y_j \gtrless c_1 x^{n_1} + \cdots + c_s x^{n_s}.$$

Satz II. Wird gemäß *Annahme II* (S. 413) Regularität der $f_\nu(y)$ in einem $\tilde{\mathfrak{Y}}_{R_0}$ mit

$$\Delta = \frac{n_2 - n_1}{n_1}, \; c > |c_2| \cdot |c_1|^{-\frac{n_2}{n_1}}$$

gefordert, so gilt obige Aussage unter den auf $\tilde{\mathfrak{Y}}_{R_0}$ bezogenen *Vor.* (A) bis (D) für $x \in \mathfrak{X}_{\bar r \tilde\eta}$, $w_2 \in \mathfrak{K}_2$ bei geeigneten $\bar r \leqq r_0$, $\delta_2 > 0$ und einer Funktion $\tilde\eta(r) > 0$.

§ 4. Beweis von Satz I und II.

Es können nun zu den Rechnungen in § 2 die notwendigen analytischen Ergänzungen gemacht werden.

Es liege *Annahme I* zu Grunde. Wir bestimmen ein positives

$$\delta_1 < \operatorname{Min}\left(\gamma, \operatorname{arc} \sin \frac{|c_1| - \vartheta^{-n_1}}{|c_1|}\right)$$

und *behaupten:*

1. Bei geeignetem r_0 und $\varrho_1 = |c_1| \cdot \sin \delta_1$ ist $f(x, w_1 x^{n_1})$ regulär für $x \in \mathfrak{X}_{r_0 \eta}$, $|w_1 - c_1| < \varrho_1$ und

2. für $x \to 0$ in $\mathfrak{X}_{r_0 \eta}$ ist

$$\text{(6, I)} \qquad f(x, w_1 x^{n_1}) - P_0(x, w_1 x^{n_1}) = o(x^k)$$

glm. hins. $w_1 \in \mathfrak{K}_1 = \{|w_1 - c_1| < \varrho_1\}$.

Beweis: 1. Wenn x in einem $\mathfrak{X}_{r_0 \eta}$ und w_1 in $\mathfrak{K}_1$ variiert, so liegt

$$y = w_1 x^{n_1} \text{ in } \mathfrak{Y}_{\bar R},$$

wo

$$\bar R = r_0^{n_1} \cdot (|c_1| + \varrho_1).$$

Dies ergibt sich sofort aus

$$\beta \equiv \varphi_1 + n_1 \alpha_j \pmod{2\pi}, \; \gamma = \delta_1 + n_1 \eta.$$

Sei nun R_0 vorgeschrieben, so daß nach (5), S. 418, für $t \leqq R_0$ $T(t) \geqq \vartheta t^{+\frac{1}{n_1}}$. und dann r_0 so gewählt, daß die Ungleichung

$$r_0^{n_1}(|c_1| + \varrho_1) \leq R_0$$

erfüllt ist.

Dann ist mit $|x| = r$, $|y| = t$

$$t = r^{n_1} |w_1| > r^{n_1} (|c_1| - \varrho_1),$$

somit wegen der Monotonie

$$\text{(7, I)} \quad T(t) > T(r^{n_1}(|c_1| - \varrho_1)) \geqq \vartheta (r^{n_1}(|c_1| - \varrho_1))^{\frac{1}{n_1}} = r\,\vartheta(|c_1| - \varrho_1)^{\frac{1}{n_1}}.$$

Nach Definition von δ_1 ist $\varrho_1 < |c_1| - \vartheta^{-n_1}$, also

$$\vartheta(|c_1| - \varrho_1)^{\frac{1}{n_1}} > 1, \text{ somit } T(t) > r.$$

wenn $r < r_0$ und damit $t < R_0$ ist. Daraus folgt, daß (x, y) im Gebiet $\mathfrak{M}$ liegt, in dem nach Hilfssatz 2 $f(x, y)$ regulär ist.

2. Zum *Beweis von 2.* wenden wir zunächst den Hilfssatz 1 (§ 1) auf

$$f_\nu(w_1 x^{n_1}) \text{ an, wobei } w_1 x^{n_1}, [l_\nu], l_\nu - [l_\nu] - 1, \mathfrak{Y}_{R_0}$$

bzw. die Rollen von $z, l, \beta, \mathfrak{Z}$ spielen.

Danach ist für $\nu \leq k$, $x \to 0$ in $\mathfrak{X}_{r_0\eta}$

$$f_\nu(w_1 x^{n_1}) = \sum_{\lambda=0}^{[l_\nu]} \frac{A_{\nu\lambda}}{\lambda!} x^{n_1\lambda} \cdot w_1^\lambda + o(x^{k-\nu}) \tag{8}$$

und

$$\mathfrak{S}_k = \sum_{\lambda=0}^{k} x^\nu f_\nu(w_1 x^{n_1}) = P_0(x, w_1 x^{n_1}) + o(x^k) \tag{9}$$

glm. hins. $w_1 \in \mathfrak{K}_1$.

Zwecks Abschätzung des Reihenrestes

$$\mathfrak{R}_k = \sum_{\nu=k+1}^{\infty} x^\nu f_\nu(y)$$

bestimmen wir zu einem beliebigen positiven ε gemäß *Vor.* (*D*) ein $t_\varepsilon \leq R_0$, so daß für $t < t_\varepsilon$

$$H_\nu(t) < \varepsilon\, \vartheta^{-\nu} t^{-\frac{\nu}{n_1}} \tag{10}$$

ist; daraus und aus (7, I) folgt

$$|\mathfrak{R}_k|\, r^{-k} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu H_\nu(t) < \varepsilon \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\vartheta \cdot t^{\frac{1}{n_1}}}\right)^\nu \leq \varepsilon \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\vartheta\, r\,(|c_1| - \varrho_1)^{\frac{1}{n_1}}}\right)^\nu < \varepsilon \cdot K,$$

$K =$ const, also

$$\mathfrak{R}_k = o(x^k) \text{ glm. hins. } w_1 \in \mathfrak{K}_1,$$

so daß unter Berücksichtigung von (9) die Richtigkeit von (6, I) nachgewiesen ist. Division von (6, I) durch $A_{01} x^{n_1}$ liefert

$$\begin{aligned} F_1(x, w_1) &= \frac{f(x, y)}{A_{01} x^{n_1}} = P_1(x, w_1) + o(x^{k-n_1}) = \\ &= w_1 - c_1 + \frac{1}{A_{01}} \sum_{\mu=1}^{k-n_1} x^\mu h_{1,\mu}(w_1) + o(x^{k-n_1}) \end{aligned} \tag{11, I}$$

für $x \in \mathfrak{X}_{r_0\eta}$, glm. in $w_1 \in \mathfrak{K}_1$.

Auf Grund von (11, I) können wir nun wie es in [4] § 3 geschieht, nach Hilfssatz 2 auf die Existenz je genau einer in $x \in \mathfrak{X}_{r\eta}^{(j)}$ ($j = 1, 2 \ldots, n_1$) regulären, in einer Umgebung von c_1 gelegenen Lösung $w_1^{(j)}(x)$ schließen.

Um aber einzusehen, daß diese Lösung gerade durch $y_0(x)$ (S. 416) asymptotisch dargestellt wird, gehen wir vermöge des Rechenverfahrens 2. (S. 415) zuerst zu w_s über. Wir benötigen dazu folgende

Bemerkung (X):

Wenn eine Beziehung $\varphi(x, w_\nu) = o(x^p)$ glm. für $|w_\nu - c_\nu| < \varrho_\nu$ gilt und gemäß (4b)

$$w_\nu = c_\nu + w_{\nu+1}\, x^{n_{\nu+1} - n_\nu}$$

gesetzt wird, so kann bei gegebenem M durch hinreichend kleine Wahl von r' glm. Gültigkeit in $x \in \mathfrak{X}_{r'\eta}$, $|w_{\nu+1}| < M$ erreicht werden, also auch in $|w_{\nu+1} - c_{\nu+1}| < \varrho_{\nu+1}$, wenn $M > |c_{\nu+1}|$, $\varrho_{\nu+1} \leq M - |c_{\nu+1}|$ gewählt wird.

Diese Überlegung, mit $\nu = 1$ auf (11, I) angewandt, liefert

$$F_2(x, w_2) = \frac{f(x, c_1 x^{n_1} + w_1 x^{n_2})}{A_{01} x^{n_2}} = P_2(x, w_2) + o(x^{k-n_2})$$

glm. in $|w_2 - c_2| < \varrho_2'$; desgl. durch Fortsetzung des Verfahrens (vgl. (4)):

$$\text{(12)}\quad \begin{aligned} F_\nu(x, w_\nu) &= P_\nu(x, w_\nu) + o(x^{k-n_\nu}) = \\ &= w_\nu - c_\nu + \frac{1}{A_{01}} \sum_{\mu=1}^{k-n_\nu} x^\mu h_{\nu,\mu+n_\nu}(w_\nu) + o(x^{k-n_\nu}). \end{aligned}$$

Jetzt wenden wir auf (12) für $\nu = s$ Hilfssatz 2 an und nehmen dort $n = 1$, ersetzen dort w durch $w_s - c_s$, k durch $k - n_s$ und setzen $\mathfrak{Z}_r = \mathfrak{X}_{\bar r, \eta}$, $\psi(w) = w = w_s - c_s$. Zu jedem $x \in \mathfrak{X}_{\bar r, \eta}^{(j)}$, $j = 1, 2 \ldots n_1$, hat also die Gleichung $F_s(x, w_s) = 0$ und damit $f(x, y) = 0$ genau eine Lösung $w_s^{(j)} \in \mathfrak{K}_s^{(j)} = \{|w_s - c_s| < \bar\varrho_s^{(j)}\}$, $\bar\varrho_s^{(j)} \leqq \varrho_s$, für die gilt

$$w_s^{(j)} \underset{k-n_s}{\sim} c_s + \cdots.$$

Da F_ν für $x \in \mathfrak{X}_{r,\eta}^{(j)}$, in x regulär ist, ist es auch $w_s^{(j)}$. Man sieht leicht, daß hier genau $w_s^{(j)} \underset{k-n_s}{\sim} c_s$ ist, d. h., daß x^n für $1 \leqq n \leqq k - n_s$ den Koeffizienten 0 hat. Nach Seite 416 sind nämlich alle Polynome $h_{s,\mu}(c_s) = 0$ ($\mu = 1, 2 \ldots, k - n_s$); wäre $w_s - c_s \sim c \cdot x^\alpha$, $0 < \alpha \leqq k - n_s$, so könnte das Polynom in (12) mit $\nu = s$ nicht $= o(x^{k-n_s})$ werden. Durch Zusammenstellung der Substitutionen (3a), (3b) ergibt sich damit die Existenz von in $x \in \mathfrak{X}_{\bar r \eta}^{(j)}$ regulären Lösungen $y = y_j(x)$ ($j = 1, 2 \ldots, n_1$), für die

$$y_j \underset{k}{\sim} c_1 x^{n_1} + \cdots c_s x^{n_s}$$

in $x \in \mathfrak{X}_{\bar r \eta}^{(j)}$, $y \in \mathfrak{Y}_{\bar R}$ ($\bar r \leqq r_0$, $\bar R \leqq R_0$). Wegen (3b) ist für hinreichend kleines $|x|$ offenbar $|w_1 - c_1| < \varrho_1$, also unsere Lösung mit der bei (11, I) durch diese Eigenschaft charakterisierten identisch.

Der *Beweis von Satz II* verläuft ähnlich.

Es werden Funktionen $\tilde\delta_1$, $\tilde\eta$, $\tilde\varrho_1$ von t mit

$$c\, t^{\frac{n_2 - n_1}{n_1}} < \tilde\delta_1 < \tilde\gamma, \; \tilde\eta = \frac{\tilde\gamma - \tilde\delta_1}{n_1}, \; c > |c_2| \cdot |c_1|^{-\frac{n_2}{n_1}}, \; \tilde\varrho_1 = |c_1| \sin \tilde\delta_1$$

festgelegt und *behauptet:*

1. Bei geeignetem $\varrho_2 > 0$ und $r_1 > 0$ ist

$$f(x, c_1 x^{n_1} + w_2 x^{n_2})$$

für $x \in \mathfrak{X}_{r_1 \tilde\eta}$, $w_2 \in \mathfrak{K}_2$ regulär,

2. und für $x \to 0$ in $\mathfrak{X}_{r_1 \eta}$ ist glm. in $w_2 \in \mathfrak{K}_2$

$$\text{(6, II)}\quad f(x, c_1 x^{n_1} + w_2 x^{n_2}) - P_0(x, c_1 x^{n_1} + w_2 x^{n_2}) = o(x^k).$$

Zum *Beweis von* 1.) müssen Gebiete $\mathfrak{X}_{r_1, \tilde\eta}$ ($r_1 \leqq r_0$), $\mathfrak{K}_2$ derart definiert werden, daß sicher $y \in \tilde{\mathfrak{Y}}_{R_0}$, wenn $x \in \mathfrak{X}_{r_1 \tilde\eta}$, $w_2 \in \mathfrak{K}_2$. Sodann wäre wie in (7, I) $r < T(t)$ zu erweisen.

Es sei zunächst $w_2 \in \mathfrak{K}_2$, $x \in \widetilde{\mathfrak{C}}_\tau$ (vgl. S. 414 oben), wobei

$$\tilde{r}(\tau) = \left(\frac{\tau}{|c_1| - \tilde{\varrho}_1(\tau)}\right)^{\frac{1}{n_1}}, \quad 0 < \tau < \tau_0 = R_0 \cdot \frac{|c_1| - \tilde{\varrho}_1(R_0)}{|c_1| + \tilde{\varrho}_1(R_0)}$$

genommen sei. Wir zeigen, daß dann gerade $|w_1 - c_1| < \tilde{\varrho}_1(\tau)$, d. h. $w_1 \in \widetilde{\mathfrak{K}}_1(\tau)$ ist.

Auf Grund von (3b) ist

$$w_1 - c_1 = w_2\, x^{n_2 - n_1},$$

also wegen $w_2 \in \mathfrak{K}_2$, $x \in \mathfrak{C}_\tau$:

$$(13)\quad \begin{aligned} |w_1 - c_1| &= |w_2| \cdot [\tilde{r}(\tau)]^{n_2 - n_1} < (|c_2| + \varrho_2)\, \tilde{r}^{\,n_2 - n_1} = \\ &= P_1(\tilde{r}) = (|c_2| + \varrho_2)\left(\frac{\tau}{|c_1| - \tilde{\varrho}_1(\tau)}\right)^{\frac{n_2 - n_1}{n_1}}. \end{aligned}$$

Es soll $P_1(\tilde{r}(\tau)) < \tilde{\varrho}_1(\tau)$ erwiesen werden. $\tilde{\varrho}_1(\tau)$ ist durch Definition (S. 421) festgelegt. Zu der in Satz II auftretenden Zahl c gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß auch noch

$$(14)\quad c > |c_2| \cdot |c_1|^{-\frac{n_2}{n_1}} \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad \ldots$$

ist. Für genügend kleines

$$\tilde{\delta}_1(\tau) < \delta_\varepsilon = \tilde{\delta}_1(\tau_\varepsilon) \quad (\tau_\varepsilon < \tau_0)$$

ist

$$\tilde{\varrho}_1(\tau) = |c_1| \cdot \sin \tilde{\delta}_1(\tau) \geqq |c_1|\,(1 - \varepsilon)\, \tilde{\delta}_1(\tau).$$

Wird hier die Definitionsungleichung für $\tilde{\delta}_1(\tau)$ unter Berücksichtigung von (14) eingesetzt, so hat man

$$\tilde{\varrho}_1(\tau) > |c_2| \cdot |c_1|^{\frac{-n_2 + n_1}{n_1}} (1 + \varepsilon)\, \tau^{\frac{n_2 - n_1}{n_1}}.$$

Vergleich mit (13) liefert, daß bei genügend kleinem ϱ_2 und τ_ε (und damit $\tilde{\varrho}_1(\tau)$) für $w_2 \in \mathfrak{K}_2$, $x \in \mathfrak{C}_\tau$ sicher $\tilde{\varrho}_1(\tau) > P_1(\tilde{r}(\tau))$ ist, also

$$w_1 \in \widetilde{\mathfrak{K}}_1(\tau).$$

Wir lassen jetzt (x, w_1) das vierdimensionale Gebiet

$$\{x \in \mathfrak{C}_\tau,\ w_1 \in \widetilde{\mathfrak{K}}_1(\tau)\}_{0 < \tau < \tau_1}$$

$(\tau_1 = \mathrm{Min}(\tau_0, \tau_\varepsilon))$ durchlaufen und zeigen, daß $y \in \mathfrak{Y}_{R_0}$.

Wegen $y = w_1 x^{n_1}$, $t = |w_1| \cdot [\tilde{r}(\tau)]^{n_1}$ ist

$$t < \frac{\tau}{|c_1| - \tilde{\varrho}_1(\tau)} \cdot (|c_1| + \tilde{\varrho}_1(\tau)) \leqq \tau \frac{|c_1| + \tilde{\varrho}_1(\tau_1)}{|c_1| - \tilde{\varrho}_1(\tau_1)} \quad (< R_0 \text{ nach Definition von } \tau_0)$$

und $t > \tau \dfrac{|c_1| - \varrho_1(\tau)}{|c_1| - \varrho_1(\tau)} = \tau$, also $\tau < t < \tau \dfrac{|c_1| + \tilde{\varrho}_1(\tau_1)}{|c_1| - \varrho_1(\tau_1)} < R_0$.

Ferner:

$$\begin{aligned} |\mathrm{arc}\, y - \beta(t)| &< |\mathrm{arc}\, x^{n_1} w_1 - \beta(\tau)| + |\beta(\tau) - \beta(t)| \leqq \\ &\leqq n_1\, \eta(\tau) + \delta_1(\tau) + |\beta(\tau) - \beta(t)| \leqq \\ &\leqq \tilde{\gamma}(\tau) + \tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(\tau) = \tilde{\gamma}(t), \end{aligned}$$

wobei wir die Ungleichung (b″) (S. 413) benutzt haben.

Hiermit ist $y \in \mathfrak{Y}_{R_0}$ für $x \in \mathfrak{X}_{r, \tilde{\eta}} = \{\mathfrak{C}\tau\}$, $(0 < \tau < \tau_1)$, $w_2 \in \mathfrak{K}_2$ erwiesen, denn $\tilde{\eta}(\tau)$ kann, da $r = \tilde{r}(\tau)$ eine eindeutige Umkehrfunktion hat, auch als Funktion von r angesehen werden.

Der Nachweis von (7, II) $r < T$ entspricht dem auf S. 419 gegebenen. Wegen $t > \tau$ ist $T(t) \geqq T(\tau) > \vartheta\, \tau^{\frac{1}{n_1}}$ und da

$$|x| = \tilde{r}(\tau) = \left(\frac{\tau}{|c_1| - \tilde{\varrho}_1(\tau)}\right)^{\frac{1}{n_1}}, \quad \vartheta < |c_1|^{-\frac{1}{n_1}}$$

ist, so ist für genügend kleines $\tau < \tau_2$ (und damit $\tilde{\varrho}_1(\tau)$) auch noch

$$T > \tilde{r}(\tau) = |x| \tag{7, II}$$

erfüllt und nach Hilfssatz 2 die Beh. 1. bewiesen, wenn $r_1 = \mathrm{Min}\,(\tilde{r}(\tau_1), \tilde{r}(\tau_2))$ gesetzt wird.

2. Zum Beweis der Beh. 2. gehen wir wie auf S. 420 vor, wobei wir nur $\mathfrak{X}_{r,\eta}$, $\mathfrak{K}_1$ und ϱ_1 durch $\tilde{\mathfrak{X}}_{r,\tilde{\eta}}$, $\tilde{\mathfrak{K}}_1$ und $\tilde{\varrho}_1$ ersetzen. (8) und (9) gelten in diesen Gebieten. Das weitere gilt ebenso; schließlich gilt (11, I) nur für $w_1 \in \mathfrak{K}_1(\tau)$, also ein Gebiet, das sich für $\tau \to 0$ (und damit $x \to 0$) auf 0 zusammenzieht. Daher ist Hilfssatz 2 nicht anwendbar. Dagegen erkennt man auf Grund des bisherigen leicht, daß für

$$F_2(x, w_2) = F_1(x, c_1 + w_2\, x^{n_2 - n_1}) \cdot x^{-n_2 + n_1}$$

glm. in $w_2 \in \mathfrak{K}_2$ gilt:

$$F_2(x, w_2) = P_2(x, w_2) + o\,(x^{k - n_2}). \tag{11, II}$$

Hiermit ist zugleich (6, II) erwiesen. Wir können wie unter (11, I) weiter verfahren und kommen auf Grund von Bem. (X) zu einer Formel (12) mit $\nu = s$, worauf die Lösung wie unter I erreichbar ist.

Man sieht ziemlich leicht, wie sich [4], 546, Satz 2 nunmehr hier unterordnet. Daß unser Satz I anderseits wirklich über jenen hinausgeht, zeigt schon das Beispiel $\underline{f_{k+\nu}(y) = y^{-\lg \nu}}$. Die dortige Vor. 3 kommt nämlich in der jetzigen Bezeichnungsweise auf $\overline{\lim\limits_{\substack{\nu \to \infty \\ y \to 0}}} |f_\nu(y)|^{\frac{1}{\nu}} |y|^{\frac{s}{\nu}} < \infty$ hinaus und ist, wie die Annahme $|y| = e^{-\nu}$ zeigt, *nicht* erfüllt, dagegen wohl die Vor. D für beliebiges $\vartheta > 0$. Hier ist sogar $T(t) = 1$, so daß ein Konvergenzgebiet der Art (2) vorliegt. Dies ist nicht mehr der Fall für $\underline{f_{k+\nu}(y) = y^{-\sigma\nu}}$ mit $0 < \sigma < 1$ und dem Konvergenzgebiet $|x| < |y|^\sigma$; Satz I ist jedoch anwendbar. Die nähere Ausführung dieser und anderer Beispiele verbietet der Raummangel.

Schriftenverzeichnis.

[1] Behnke, H., u. P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. Math. 3, 3 (1934). — [2] Osgood, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie Bd. II 1, 1924. — [3] Schmidt, Hermann: Beiträge zu einer Theorie der allgemeinen asymptotischen Darstellungen. Math. Ann. 113, 629—656 (1937). — [4] Schmidt, Hermann: Über Existenz und Darstellung impliziter Funktionen bei singulären Anfangswerten. Math. Z. 43, 533—552 (1938).

(Eingegangen am 24. Dezember 1949.)

Math. Annalen, Bd. 122, S. 424—434 (1951).

Über die Fortsetzung analytischer Flächen.

Von

Wolfgang Rothstein in Marburg (Lahn).

Der wesentliche Inhalt eines früher bewiesenen Satzes[1]) kann folgendermaßen ausgedrückt werden. *Voraussetzung*: $\mathfrak{B}$ *sei ein schlichter, beschränkter Regularitätsbereich des* R_{2n} ($n \geq 3$) *und* $\mathfrak{R}$ *sein Rand. Die* ($2n - 2$)*-dimensionale analytische Fläche* $\tilde{\mathfrak{F}}$ *möge* $\mathfrak{R}$ *unter anderem in einer abgeschlossenen, (auf* $\tilde{\mathfrak{F}}$*) zusammenhängenden Menge* $\tilde{S}$ *innerer* $\tilde{\mathfrak{F}}$*-Punkte schneiden, die ohne Aufgabe des Zusammenhanges nicht erweitert werden kann. Behauptung: Dann begrenzt* $\tilde{S}$ *ein beschränktes singularitätenfreies* $\tilde{\mathfrak{F}}$*-Stück* $\tilde{\mathfrak{F}}_S$*, dessen Rand genau* $\tilde{S}$ *ist.* $\tilde{\mathfrak{F}}_S$ *liegt in* $\mathfrak{B}$. — Aus der letzten Aussage folgt sofort, daß dieser Satz nicht allgemein für Nichtregularitätsbereiche richtig sein kann. Denn natürlich lassen sich Bereiche konstruieren, die aus $\tilde{\mathfrak{F}}$ ein von mehreren Kontinuen begrenztes Flächenstück ausschneiden.

Andererseits ist es aber von untergeordneter Bedeutung, ob solche weiteren Schnitte von $\tilde{\mathfrak{F}}$ mit $\mathfrak{R}$ vorhanden sind oder nicht. Wichtig ist nur, ob es überhaupt ein singularitätenfreies $\tilde{\mathfrak{F}}$-Stück $\tilde{\mathfrak{F}}_S$ gibt, welches genau von $\tilde{S}$ berandet wird. Das kann für schlichte beschränkte Bereiche $\mathfrak{B}$ ohne wesentliche Einschränkungen bejaht werden. Es genügt, vorauszusetzen, daß $\mathfrak{B}$ stückweise von Hyperebenen berandet wird; genauer: $\mathfrak{R}$ soll aus endlich vielen Hyperebenenstücken bestehen und jeder Punkt von $\mathfrak{R}$ soll Randpunkt auch des Komplementes $\bar{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ sein. Dann besitzt $\mathfrak{B}$ keine „Einschnitte". Diese Bereiche nennen wir „Normalbereiche". Zur Erleichterung der Vorstellung führen wir den Beweis für einen Normalbereich des R_6. Im R_{2n} geht es genau so.

Der angegebene Satz steht in unmittelbarer Beziehung zu dem Problem des Zusammenhanges der Singularitäten von analytischen Funktionen mindestens zweier Veränderlichen, das zuletzt von H. Behnke[2]) behandelt wurde. Der dort auf ganz anderem Wege bewiesene Satz 2 drückt einen ähnlichen Sachverhalt wie unser Satz aus. Die Sätze decken sich jedoch nicht. Während wir vorläufig noch voraussetzen müssen, daß $\mathfrak{B}$ beschränkt ist, ist dort einschränkend vor allem die Forderung, daß die Funktion endlichblättrig ist, eine Voraussetzung also über den Funktionsverlauf im großen. Außerdem handelt es sich dort stets nur um eindeutige Zweige der Funktion. — Man kann sich den Zusammenhang des Behnkeschen Satzes mit dem unseren so vorstellen (wobei angenommen wird, bei uns brauche $\mathfrak{B}$ nicht beschränkt zu sein): Man geht von den Funktionen im R_{2n} über zu den ihnen entsprechenden Flächen über dem R_{2n+2}, im wesentlichen also zu ihren Riemannschen Flächen, und drückt dann den Inhalt des Satzes in der gehörigen Allgemeinheit aus.

[1]) Rothstein, W.: Die Fortsetzung vier- und höherdimensionaler analytischer Flächen des R_{2n} ($n \geq 3$). (Cousinsche Verteilungen 2. Art.) Math. Ann. **121**, 340 (1950).

[2]) Behnke, H.: Über die Fortsetzbarkeit analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen und der Zusammenhang der Singularitäten. Math. Ann. **117**, 89ff. (1939).

Bekanntlich stößt der Beweis des alten HARTOGS-OSGOODschen Satzes[3]) auf große Schwierigkeiten topologischer Natur. Diese Schwierigkeiten treten hier nicht auf; sie werden durch einfache funktionentheoretische Sätze ausgeschaltet.

Das Beweisprinzip ist sehr einfach und vom HARTOGS-OSGOODschen Satze her bekannt. Man schließt $\mathfrak{B}$ in eine Kugel $\mathfrak{K}$ um einen äußeren Punkt 0 (es könnte ebensogut ein innerer Punkt sein) ein und zieht $\mathfrak{K}$ auf den Mittelpunkt zusammen. Gleichzeitig wird $\tilde{\mathfrak{F}}$ vom Rande $\tilde{S}$ her fortgesetzt. Den Kern des Beweises bildet die Tatsache, daß die Fortsetzung nicht zum Stillstand kommen kann. Daß dieser einfache Beweisgedanke sich wirklich durchführen läßt, beruht vor allem auf den folgenden Sätzen A, B, C.

Zur Bezeichnung werde folgendes bemerkt. Die mit $\sim$ versehenen Buchstaben bedeuten stets Mengen von $\tilde{\mathfrak{F}}$-Punkten. Ein Punkt $\tilde{P}$ von $\tilde{\mathfrak{F}}$ ist wie bei RIEMANNschen Flächen durch den Grundpunkt P und ein zu $\tilde{P}$ gehöriges $\tilde{\mathfrak{F}}$-Element $\tilde{\mathfrak{E}}_{\tilde{P}}$ definiert. Wir denken uns $\tilde{\mathfrak{E}}_{\tilde{P}}$ gegeben durch die Nullstellen einer in P irreduziblen Gleichung $g_P = 0$, welche einer Kugel um P angehören und eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit bilden. „Zusammenhängend" usw. bedeutet im folgenden immer „auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ zusammenhängend" usw. Die Grundmannigfaltigkeiten von $\tilde{\mathfrak{F}}$-Punktmengen werden durch die gleichen Buchstaben ohne $\sim$ bezeichnet. Ferner bedeutet etwa $[\mathfrak{N}]$: $\mathfrak{N}$ mit Einschluß seiner Häufungspunkte. Schließlich verstehen wir unter $\mathfrak{U}_\varepsilon(\mathfrak{N})$ die Vereinigungsmenge der Punkte aller Kugeln vom Radius ε um Punkte von $\mathfrak{N}$.

Satz A[4]). *$\mathfrak{A}$ sei das Kugeläußere $\varphi = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 > 1$, R ein Punkt auf $\varphi = 1$ und $\mathfrak{U}$ eine Kugel um R. Ist dann V in $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}$ algebraisch, so auch in R. Es gibt also eine „lokale Fortsetzung $(\mathfrak{U}'_R, g_R)$" von V, so daß g_R und V in $\mathfrak{U}'_R \cap \mathfrak{A}$ äquivalent sind.*

Satz B. Die analytische vierdimensionale Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ schneide $\varphi = 1$ u. a. in einer abgeschlossenen zusammenhängenden Menge $\tilde{K}$ innerer $\tilde{\mathfrak{F}}$-Punkte. $\mathfrak{U}_\varepsilon(K)$ sei irgendeine ε-Umgebung von K. Dann gibt es ein Flächenstück $\tilde{\mathfrak{F}}_K \subset \tilde{\mathfrak{F}}$, welches $\tilde{K}$ im Inneren enthält, dessen Grundpunkte in $\mathfrak{U}_\varepsilon(K)$ liegen und das in $\mathfrak{A}$ nicht zerfällt. Der Schnitt von $\tilde{\mathfrak{F}}_K$ mit dem Kugeläußeren $\mathfrak{A}$ bildet also ein einziges Flächenstück $\tilde{\mathfrak{F}}_{K\mathfrak{A}}$.

Beweis: Auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ gilt der HEINE-BORELsche Überdeckungssatz. Zu jedem Punkt $\tilde{P}$ von $\tilde{K}$ gibt es ferner ein $\tilde{P}$ definierendes $\tilde{\mathfrak{F}}$-Element $\tilde{\mathfrak{E}}$, das beliebig klein gewählt werden kann. Aus Satz A folgt, daß $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{A}$ aus einem Stück besteht, wenn die zugehörige Kugel um P nur genügend klein ist. Denn in $\mathfrak{A}$ kann $\tilde{\mathfrak{E}}$ in höchstens endlich viele Stücke zerfallen. Angenommen, zwei von ihnen, $\tilde{\mathfrak{E}}_1 \neq \tilde{\mathfrak{E}}_2$, hätten $\tilde{P}$ als Randpunkt! Dann entspricht $\tilde{\mathfrak{E}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{E}}_2$ je eine in $\mathfrak{U}_P \cap \mathfrak{A}$ zulässige Verteilung $V_1 \neq V_2$. Beide Verteilungen lassen sich nach P fortsetzen, und zwar so, daß die Äquivalenz der Fortsetzungen V_1^*, V_2^* mit V_1 bzw. V_2 in $\mathfrak{A}$ gewahrt bleibt. Also können $\tilde{\mathfrak{E}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{E}}_2$ auch nach der Fortsetzung nicht miteinander zusammenhängen (sonst müßte V_2^* in $\mathfrak{A}$ neben

[3]) Vgl. H. BEHNKE—P. THULLEN, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen; S. 50, Satz 18. Erg. Math.. Berlin: Springer 1934.

[4]) Vgl. [1]), Satz 2.

$\tilde{\mathfrak{E}}_2$ auch $\tilde{\mathfrak{E}}_1$ definieren, folglich $\tilde{\mathfrak{E}}_2$ schon auf $V_2 = 0$ liegen). Das ist jedoch unmöglich. — Endlich viele dieser Elemente genügen zur Überdeckung von $\breve{K}$. Sie definieren ein einziges Flächenstück $\tilde{\mathfrak{F}}_K$, das in $\mathfrak{A}$ nicht zerfällt.

Satz C[5]). *$\mathfrak{M}$ sei eine abgeschlossene Punktmenge auf $\varphi = 1$. Jedem Punkt P aus $\mathfrak{M}$ sei eine Kugel $\mathfrak{U}_P$ um P und eine dort reguläre Funktion g_P so zugeordnet, daß im Kugeläußeren $\mathfrak{A}$ die Äquivalenzbedingungen: g_P/g_Q und g_Q/g_P regulär in $\mathfrak{U}_P \cap \mathfrak{U}_Q \cap \mathfrak{A}$ erfüllt sind. Dann definieren die g_P in einer vollen Umgebung von $\mathfrak{M}$ eine zulässige Verteilung V regulärer Ortsfunktionen.*

Beweis: Man ordne jedem P eine Kugel $\mathfrak{U}'_P \Subset \mathfrak{U}_P$ zu. Dann ist g_P auch auf dem Rand von $\mathfrak{U}'_P$ noch regulär. Endlich viele $\mathfrak{U}_P$, etwa $\mathfrak{U}'_1, \ldots, \mathfrak{U}'_s$ überdecken $\mathfrak{M}$ vollständig. Die Paare $(\mathfrak{U}_\sigma\, g_\sigma)$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$ definieren in $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}'_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{U}'_s$ eine Verteilung V_s, die in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ offenbar äquivalent V ist. V_s genügt aber auch in einer vollen $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ den Äquivalenzbedingungen. Andernfalls muß es nämlich einen Punkt R^* auf $\mathfrak{M}$ geben, so daß die Äquivalenz in jeder Umgebung von R^* gestört ist. In R^* ist nur die Äquivalenz derjenigen g_σ zu prüfen, deren zugehörige Kugeln R^* im Inneren oder auf dem Rande enthalten. Alle diese g_σ sind in R^* noch regulär und in einer Umgebung von R^* auf der Seite $\varphi > 1$ paarweise zueinander äquivalent. Die Äquivalenz überträgt sich aber sofort auf eine volle Umgebung von R^*; denn die Quotienten $g_{\sigma_1} : g_{\sigma_2}$ und $g_{\sigma_2} : g_{\sigma_1}$ müssen in R^* regulär bleiben. Die Äquivalenz kann daher in R^* nicht gestört sein. — Also genügt V_s in einer $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ den Äquivalenzbedingungen und ist in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ äquivalent V. Derselbe Schluß, der die Äquivalenz der g_σ zeigte, liefert nun die Äquivalenz von V und V_s in einer vollen Umgebung $\mathfrak{U}_1(\mathfrak{M})$.

Außerdem setzen wir einiges als bekannt voraus, welches den Schnitt einer analytischen Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ mit stückweise reellanalytischen Mannigfaltigkeiten betrifft. Es handelt sich immer nur um singularitätenfreie Teile von $\tilde{\mathfrak{F}}$. Im Text werden die Einzelheiten ohne weiteres klar werden. Vor allem kommt in Frage, daß diese Schnitte stets in endlich viele (auf $\tilde{\mathfrak{F}}$) zusammenhängende Teile zerlegt werden können, die sich ohne Aufgabe des Zusammenhanges nicht erweitern lassen.

Neue Formulierung des Satzes.

$\mathfrak{B}$ sei ein Normalbereich des R_8 mit dem Rande $\mathfrak{R}$. Der Schnitt $\tilde{S}$ von $\tilde{\mathfrak{F}}$ und $\mathfrak{R}$ soll zusammenhängen und ganz aus inneren $\tilde{\mathfrak{F}}$-Punkten bestehen; $\tilde{S}$ soll sich nicht erweitern lassen, ohne den Zusammenhang zu verlieren. Ob außerdem weitere Schnitte von $\tilde{\mathfrak{F}}$ und $\mathfrak{R}$ vorhanden sind, ist belanglos. Man kann nun eine $\mathfrak{U}_\varepsilon(\mathfrak{R})$ und eine in $\mathfrak{U}_\varepsilon(\mathfrak{R})$ zulässige Verteilung V_S mit folgenden Eigenschaften angeben: 1. V_S definiert in $\mathfrak{U}_\varepsilon(\mathfrak{R})$ genau ein Flächenstück $\tilde{\mathfrak{F}}_S \subset \tilde{\mathfrak{F}}$. 2. $\tilde{\mathfrak{F}}_S$ schneidet $\mathfrak{R}$ genau in $\tilde{S}$. — Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß $\tilde{\mathfrak{F}}$ nicht mit einer der vierdimensionalen Ebenen, die auf $\mathfrak{R}$ liegen, identisch ist. Ferner möge $\tilde{S}$ überall genau dreidimensional sein und $\tilde{\mathfrak{F}}_S$ in zwei Teile zerlegen, die nur über $\tilde{S}$ miteinander zusammenhängen. Wir verlangen nicht, daß die in $\mathfrak{B}$ oder $\overline{\mathfrak{B}}$ gelegenen Teile von $\tilde{\mathfrak{F}}_S$ je ein einziges Flächenstück ausmachen. Es ist durchaus zugelassen, daß beide Teile in

[5]) Vgl. [1]), Satz 1, Folgerung C.

mehrere Stücke zerfallen. Als Produkt $V' \times V''$ der Verteilungen V', V'' mit den Ortsfunktionen g'_P, g''_P werde die Verteilung mit den Ortsfunktionen $G_P = g'_P \cdot g''_P$ bezeichnet. Die Behauptung läßt sich jetzt so aussprechen:

Entweder für $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$; $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{B}$ oder für $\mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{B}}$; $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{B}$ gilt der

Satz. Es gibt eine $\mathfrak{U}_{\varepsilon'}(\mathfrak{R})$ *und eine in* $\mathfrak{U}_{\varepsilon'}(\mathfrak{R})$ *zulässige Verteilung* $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}}$, *ferner eine in* $\mathfrak{C}$ *zulässige* $V_{\mathfrak{C}}$ *und eine in* $\overline{\mathfrak{C}}$ *zulässige* $V_{\overline{\mathfrak{C}}}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

1. $V_{\mathfrak{C}}$ *ist äquivalent zu* $V_S \times V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}}$ *in* $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{U}_{\varepsilon'}(\mathfrak{R})$;
2. $V_{\overline{\mathfrak{C}}}$ *ist äquivalent zu* $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}}$ *in* $\overline{\mathfrak{C}} \cap \mathfrak{U}_{\varepsilon'}(\mathfrak{R})$.

Die Richtigkeit dieser Aussage wurde bereits für jeden schlichten, beschränkten Regularitätsbereich $\mathfrak{B}$ bewiesen[6]). In diesem Falle ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$; $\overline{\mathfrak{C}} = \overline{\mathfrak{B}}$ und $V_{\overline{\mathfrak{C}}}$, $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}}$ sind die trivialen nullstellenfreien Verteilungen. — Jetzt muß zugelassen werden, daß das von $\tilde{S}$ berandete Flächenstück $\mathfrak{R}$ noch in anderen Kontinuen schneidet. Die in $\mathfrak{C}$ gelegenen Teile dieses Flächenstückes werden durch $V_{\mathfrak{C}}$, die in $\overline{\mathfrak{C}}$ gelegenen durch $V_{\overline{\mathfrak{C}}}$ dargestellt. $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}}$ verbindet $V_{\mathfrak{C}}$ und $V_{\overline{\mathfrak{C}}}$. Der Randstreifen $\tilde{\mathfrak{F}}_S$ ist durch V_S gegeben.

Beweis des Satzes.

I. Bezeichnungen: $\mathfrak{A}$-Bögen, $\mathfrak{K}$-Bögen, Zyklen. Beweisgang (vgl. die Skizze).

Wir fixieren einen Punkt O außerhalb $\mathfrak{B}$ und bezeichnen die Oberflächen der Kugeln vom Radius r um O mit $\mathfrak{K}(r)$, ihr Äußeres mit $\mathfrak{A}(r)$, ihr Inneres mit $\mathfrak{J}(r)$. Für $T_1 < r < T_2$ möge $\mathfrak{K}(r)$ noch $\mathfrak{B}$ schneiden. $\mathfrak{K}(T_2)$ berührt $\mathfrak{B}$ dann von außen, und es ist $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{J}(T_2)$; $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}(T_1)$.

Sei $T_1 < r' < T_2$. In $\mathfrak{A}(r')$ wird $\tilde{S}$ in endlich viele zusammenhängende Stücke zerfallen, die „$\mathfrak{A}$-Bögen" $\tilde{A}(r')$. $\mathfrak{K}(r')$ schneidet $\tilde{S}$ ebenfalls in endlich vielen Stücken, den „$\mathfrak{K}$-Bögen" $\tilde{K}(r')$. Sie sind im Gegensatz zu den $\tilde{A}(r')$ abgeschlossen. Eine Reihe von $\mathfrak{A}$-Bögen $\tilde{A}(r')$ und $\mathfrak{K}$-Bögen $\tilde{K}(r')$ bildet einen „Zyklus" $\tilde{Z}(r')$, wenn 1. ihre Vereinigungsmenge zusammenhängt und 2. diese Eigenschaft verlorengeht, sobald weitere $\mathfrak{A}$- oder $\mathfrak{K}$-Bögen hinzutreten. Zwei $\mathfrak{A}$-Bögen $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ desselben Zyklus sind „benachbart", wenn sie durch einen $\mathfrak{K}$-Bogen $\tilde{K}_{12}$ verbunden werden: $\tilde{A}_1 \cup \tilde{K}_{12} \cup \tilde{A}_2$ ist dann zusammenhängend. — Ist $r'' < r'$, so ist jeder Zyklus $\tilde{Z}(r')$ in einem einzigen $\mathfrak{A}$-Bogen $\tilde{A}(r'')$ enthalten. Wenn dagegen $r'' > r'$ ist und $\tilde{A}_1(r') \neq \tilde{A}_2(r')$, so gehören zwei $\mathfrak{A}$-Bögen $\tilde{A}_1(r'') \subset \tilde{A}_1(r')$ und $\tilde{A}_2(r'') \subset \tilde{A}_2(r')$ sicher nicht zum gleichen Zyklus $\tilde{Z}(r'')$. — Ein $\mathfrak{K}$-Bogen $\tilde{K}(r')$ heißt „isoliert", wenn er allein einen Zyklus bildet. — Die Grundmannigfaltigkeiten der $\tilde{A}$, $\tilde{K}$, $\tilde{Z}$ werden, wie allgemein festgesetzt, mit A, K, Z bezeichnet.

Aus Satz B folgt unmittelbar:

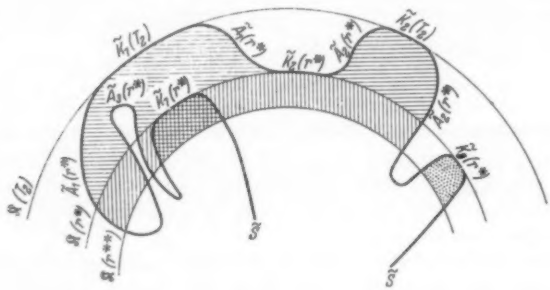
(*) *Jedem* $\mathfrak{K}$*-Bogen* $\tilde{K}(r')$ *kann eine* $\mathfrak{U}_\varepsilon(K)$ *und eine dort zulässige Verteilung* V_K *so zugeordnet werden, daß gilt:*

1. V_K *definiert in* $\mathfrak{U}_\varepsilon(K)$ *genau ein Flächenstück* $\tilde{\mathfrak{F}}_K \subset \tilde{\mathfrak{F}}$.
2. $\tilde{\mathfrak{F}}_K$ *schneidet* $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{K}(r')$ *innerhalb* $\mathfrak{U}_\varepsilon(K)$ *genau in* $\tilde{K}(r')$.
3. $\tilde{\mathfrak{F}}_K$ *zerfällt in* $\mathfrak{A}(r')$ *nicht, sondern besteht dort aus einem Stück* $\tilde{\mathfrak{F}}_{K\mathfrak{A}}$.

[6]) Vgl. [1]), Satz I*.

4. $\tilde{\mathfrak{F}}_{K\mathfrak{A}}$ *wird durch* $\tilde{S}$ *in endlich viele Stücke* $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_l$ *zerschnitten, die längs* $\mathfrak{A}$*-Bögen aneinandergrenzen und bei richtiger Reihenfolge abwechselnd* $\mathfrak{B}$ *und* $\overline{\mathfrak{B}}$ *angehören.* Dadurch wird $\tilde{K}$ in einen „Streifen $\tilde{\mathfrak{F}}_K$" eingebettet.

Der folgende Beweis verläuft so (vgl. die Skizze): $\mathfrak{K}(T_2)$ schneidet $\tilde{S}$ nur in isolierten $\mathfrak{K}$-Bögen, $\mathfrak{A}(T_2)$-Bögen gibt es nicht. Man zieht nun $\mathfrak{K}(T_2)$ auf $\mathfrak{K}(r')$ zusammen und setzt gleichzeitig $\tilde{\mathfrak{F}}$ vom Rande $\tilde{S}$ her ins Innere von $\mathfrak{K}(T_2)$ fort. Solange $T_2 - r'$ klein ist, entsteht aus jedem $\tilde{\mathfrak{K}}_i(T_2)$ ein Flächenstück $\tilde{\mathfrak{F}}^*_{K_i}$, dessen Rand von einem einzigen Zyklus $\tilde{Z}(r')$ und außerdem $\mathfrak{K}(r')$-Punkten gebildet wird. Man zieht dann $\mathfrak{K}(r')$ weiter zusammen und setzt die $\tilde{\mathfrak{F}}^*_{K_i}$ gleichzeitig so lange fort, wie das möglich ist. Dabei werden sich einige der zunächst getrennten $\tilde{\mathfrak{F}}^*_{K_i}$ zu einem einzigen Flächenstück vereinigen. Die



aus der Vereinigung entstandenen Flächenstücke sind i. a. nicht mehr — außer von den auf der Grenzfläche $\mathfrak{K}(r)$ gelegenen Randpunkten — von einem einzigen Zyklus begrenzt, sondern von mehreren $\tilde{Z}(r)$. Die zum gleichen Flächenstück gehörigen $\tilde{Z}(r)$ fassen wir zu einer Zyklengruppe zusammen (vgl. II). Es wird nun gezeigt, daß der skizzierte Fortsetzungsprozeß nicht an einem $r^* > 0$ zum Stillstand kommen kann. Die Annahme, ein solches $r^* > 0$ existiere, wird widerlegt. Dazu präzisieren wir in III die Eigenschaften von r^*. Dann wird (IV—VI) die Fortsetzung bereits vorhandener Flächenstücke behandelt; es wird also angenommen, der Prozeß sei bereits im Gang. In IV werden die Flächenstücke, die nach der Fortsetzung sich zu einem Flächenstück vereinigen, durch Verteilungen dargestellt. Besonders wichtig sind die Abschnitte IV [2], [3], welche diese Darstellung erst ermöglichen. In V erfolgt die Fortsetzung der Verteilungen, im wesentlichen also die Konstruktion des umfassenden Flächenstücks. Man erhält u. U. hierdurch zunächst ein zu großes Flächenstück, das $\tilde{S}$-Stücke im Innern enthält. Diese störenden Stücke werden in VI herausgeschnitten. Geschähe das nicht, so würde der Beweis von IV [2], [3] zusammenbrechen. VII endlich behandelt den bisher beiseite gelassenen Fall isolierter $\mathfrak{K}(r^*)$-Bögen, aus denen neue Flächenstücke entstehen. Damit wird gleichzeitig die Möglichkeit $r^* = T_2$ erfaßt; der Fortsetzungsprozeß kommt also überhaupt in Gang.

Die nebenstehende Skizze zeigt:

a) die $\mathfrak{K}\,(r^*)$-Zyklen $\tilde{\tilde{Z}}_1\,(r^*) = \{[\tilde{A}_1], \tilde{K}_2, [\tilde{A}_2]\}$; $\tilde{\tilde{Z}}_2\,(r^*) = \{[\tilde{A}_3]\}$; $\tilde{\tilde{Z}}_3(r^*) = \{\tilde{\tilde{K}}_1\,(r^*)\}$; $\tilde{\tilde{Z}}_4\,(r^*) = \{\tilde{\tilde{K}}_3\}$. Die letzten beiden sind isolierte $\mathfrak{K}\,(r^*)$-Bögen, (vgl. I);

b) die Gruppen $\tilde{g}_1\,(r^*) = \{[\tilde{A}_1], [\tilde{A}_3]\}$; $\tilde{g}_2\,(r^*) = \{[\tilde{A}_2]\}$;

c) die Gruppen $\tilde{G}_1\,(r^*) = \{\tilde{g}_1, \tilde{K}_2, \tilde{g}_2, \tilde{K}_1\}$; $\tilde{G}_2\,(r^*) = \{\tilde{K}_3\}$ (Vgl. II—IV).

Die beiden Flächenstücke $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{g_1}, \tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{g_2}$ werden bei der Fortsetzung verschmolzen zum Flächenstück $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{G_1(r^{**})}$, welches sich aus den einfach schraffierten Teilen zusammensetzt. Die Fortsetzung liefert zunächst außerdem noch das doppeltschraffierte Stück. Dieses wird zum Schluß herausgeschnitten (vgl. V, VI). Der aus $\tilde{G}_2\,(r^*)$ entstehenden Gruppe $\tilde{G}_2\,(r^{**})$ entspricht das (punktierte) Flächenstück $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{G_2(r^{**})}$ (vgl. VII).

$\mathfrak{K}\,(r^*)$-Bögen bilden natürlich auch z. B. die Randpunkte von $\tilde{A}_3\,(r^*)$. Sie sind nicht besonders bezeichnet.

Alle Zyklen $\tilde{\tilde{Z}}\,(r^{**})$ sind abgeschlossene $\mathfrak{A}\,(r^{**})$-Bögen.

II. Einteilung der Zyklen in Gruppen.

$\tilde{Z}\,(r')$ sei ein Zyklus in $\mathfrak{A}\,(r')$. Ist $r'' < r'$ genügend nahe an r', so bildet der abgeschlossene Bogen $[\tilde{A}\,(r'')]$, dem $\tilde{Z}\,(r')$ angehört, allein einen Zyklus $\tilde{\tilde{Z}}\,(r'')$. Da es nur endlich viele $\tilde{Z}\,(r')$ gibt, kann ein für alle $\tilde{Z}\,(r')$ gleichzeitig brauchbares $r'' < r'$ fixiert werden. Es möge so groß sein, daß jeder Bogen $\tilde{A}\,(r'')$ wenigstens einen (und dann genau einen) Zyklus $\tilde{Z}\,(r')$ enthält. Die Zuordnung $\tilde{\tilde{Z}}\,(r') \leftrightarrow \tilde{A}\,(r'')$ ist dann ein-eindeutig.

Angenommen, es sei möglich, die $\tilde{\tilde{Z}}\,(r'')$ so auf elementefremde „Zyklengruppen" $\tilde{G}\,(r'')$ zu verteilen, daß drei Bedingungen erfüllt sind:

1. Jeder Zyklus $\tilde{\tilde{Z}}\,(r'')$ gehört genau einer $\tilde{G}\,(r'')$ an.

2. Zu jeder $\tilde{G}\,(r'')$ gibt es ein beschränktes singularitätenfreies $\tilde{\mathfrak{F}}$-Stück $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{G(r'')}$, dessen Rand in $\mathfrak{A}\,(r'')$ genau aus den Zyklen der Gruppe besteht. Alle anderen Randpunkte von $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{G(r'')}$ müssen also auf $\mathfrak{K}\,(r'')$ liegen.

3. Jeder Zyklus $\tilde{\tilde{Z}}\,(r'')$ enthält nur Randpunkte der $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{G(r'')}$.

Im Inneren der $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{G(r'')}$ gibt es also keinen $\tilde{\tilde{Z}}\,(r'')$-Punkt.

$\tilde{G}\,(r'')$ und $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{G(r'')}$ entsprechen einander dann ein-eindeutig. Da die Zuordnung $\tilde{\tilde{Z}}\,(r'') \leftrightarrow \tilde{Z}\,(r')$ umkehrbar eindeutig ist, überträgt sich die Gruppeneinteilung auf die $\tilde{Z}\,(r')$ ungeändert. Wir setzen $\tilde{G}\,(r') = \lim\limits_{r'' \to r'} G\,(r'')$ $(r'' < r')$. Die $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{G(r'')}$ können in $\mathfrak{A}\,(r')$ zerfallen, so daß einer $\tilde{G}\,(r')$ unter Umständen mehrere Flächenstücke zuzuordnen sind, eben der Durchschnitt $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{G(r'')} \cap \mathfrak{A}\,(r') = \tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{G(r')}$. Das kann jedoch nur für endliche viele r' eintreten.

III. Klasseneinteilung der r.

Nun werde weiter angenommen, bei dem festen Wert r' sei die Existenz der $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{G(r')}$ für alle $\tilde{Z}\,(r')$ gesichert. Mit anderen Worten: Die Aufteilung sämtlicher $\tilde{Z}\,(r')$ in zyklenfremde Gruppen $\tilde{G}\,(r')$, denen ein-eindeutig die $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{G(r')}$ zu-

geordnet sind, sei möglich. Dann gehöre r' zur „Klasse M". Schließlich sollen noch die $\tilde{\mathfrak{F}}_{G(r')}$ bei abnehmendem r' stetig wachsen. Das bedeutet: Ist $r_2' < r_1'$ und gehören r_2', r_1' zu M, so soll es zu jeder Gruppe $\tilde{G}(r_1')$ eine Gruppe $\tilde{G}(r_2)$ so geben, daß die $\tilde{Z}(r_1')$ aus $\tilde{G}(r_1')$ in den Zyklen von $G(r_2')$ enthalten sind und $\tilde{\mathfrak{F}}_{G(r_1')} \subset \tilde{\mathfrak{F}}_{G(r_2')}$ ist. — Zu M sollen ferner alle $r > T_2$ gehören. Die Klasse N enthalte alle übrigen $r > 0$. Entweder N ist leer, oder die Klasseneinteilung definiert ein $r^* = [M/N]$; im zweiten Fall muß offenbar r^* in N liegen. Die Behauptung des Satzes läßt sich nun so formulieren:

N ist leer; r^* existiert also nicht.

Hieraus folgt in der Tat sofort der Satz. Denn für $r' > T_1$ gibt es nur einen $\mathfrak{A}$-Bogen, nämlich $\tilde{S}$ selbst. Es muß infolgedessen ein von $\tilde{S}$ berandetes beschränktes Flächenstück $\tilde{\mathfrak{F}}_*$ geben, dessen einziger wesentlicher Randpunkt möglicherweise 0 sein könnte. Da es aber isolierte wesentliche Randpunkte nicht gibt, ist $\tilde{\mathfrak{F}}_*$ völlig singularitätenfrei.

Es ist gut, die Eigenschaften der Elemente von M zu präzisieren. Zu M gehören außer den $r' > T_2$ noch genau diejenigen r', zu denen es ein $r'' < r'$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. Jeder Zyklus $\tilde{Z}(r'')$ ist ein abgeschlossener $\mathfrak{A}$-Bogen $[\tilde{A}(r'')]$ und enthält genau einen Zyklus $\tilde{Z}(r')$. Die Zuordnung $\tilde{Z}(r') \to \tilde{Z}(r'') = [\tilde{A}(r'')]$ ist also ein-eindeutig. Das ist selbstverständlich für jedes Paar $r'' < r'$ erfüllt, wenn nur $r' - r''$ genügend klein ist.

2. Die Zyklen $\tilde{Z}(r'')$ lassen sich so auf Gruppen $\tilde{G}(r'')$ verteilen, daß:

α) jeder Zyklus in genau einer Gruppe vertreten ist und

β) jeder $\tilde{G}(r'')$ eindeutig ein Flächenstück $\tilde{\mathfrak{F}}_{G(r'')} \subset \tilde{\mathfrak{F}}$ zugeordnet ist, welches folgendermaßen definiert wird:

$\mathfrak{R}(r'')$ sei der gemeinsame Teil des Randes von $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r'')$ und $\overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{A}(r'')$. Sowohl $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r'')$ als auch $\overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{A}(r'')$ können sich aus endlich vielen Bereichen zusammensetzen. — Es gibt nun eine $\mathfrak{U}_\varepsilon\{\mathfrak{R}(r'')\}$ $(\varepsilon = \varepsilon(r''))$ und eine dort zulässige $V_{G(r'')} \subset V_S$, die $\tilde{G}(r'')$ genau darstellt. (Einbetten der $\tilde{G}$-Zyklen in $\tilde{\mathfrak{F}}$-Streifen.) Weiter gibt es entweder für $\mathfrak{C}(r'') = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r'')$; $\overline{\mathfrak{C}}(r'') = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r'')$ oder für $\mathfrak{C}(r'') = \overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{A}(r'')$; $\overline{\mathfrak{C}}(r'') = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r'')$ je eine zulässige $V_{\mathfrak{C}}$ in $\mathfrak{C}(r'')$; $\overline{V}_{\overline{\mathfrak{C}}}$ in $\overline{\mathfrak{C}}(r'')$ und $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}}$ in $\mathfrak{U}_\varepsilon\{\mathfrak{R}(r'')\}$, für welche $V_{\mathfrak{C}}$ äquivalent $V_{G(r'')} \times V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}}$ in $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{U}_\varepsilon$; $\overline{V}_{\overline{\mathfrak{C}}}$ äquivalent $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}}$ in $\overline{\mathfrak{C}} \cap \mathfrak{U}_\varepsilon$ ist. Wir sagen kurz: „$\tilde{\mathfrak{F}}_{G(r'')}$ *liegt in* $\mathfrak{B}$", wenn $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r'')$ und „$\tilde{\mathfrak{F}}_{G(r'')}$ *liegt in* $\overline{\mathfrak{B}}$", wenn $\mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{A}(r'')$ ist.

γ) kein $\tilde{Z}(r'')$ innere Punkte eines der $\tilde{\mathfrak{F}}_{G(r'')}$ enthält.

3. Liegen $r_1' > r_2'$ in M, so gehört zu jeder $\tilde{G}(r_1')$ genau eine „umfassende" $\tilde{G}(r_2')$; jeder Zyklus von $\tilde{G}(r_1')$ ist Bestandteil eines Zyklus von $\tilde{G}(r_2')$. Für beide Gruppen ist entweder gleichzeitig $\mathfrak{C}(r_1') = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r_1'')$ und $\mathfrak{C}(r_2') = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r_2'')$ oder gleichzeitig $\mathfrak{C}(r_1'') = \overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{A}(r_1'')$ und $\mathfrak{C}(r_2') = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r_2'')$. Schließlich sind die zu $\tilde{G}(r_1')$ gehörigen V_G, $V_{\mathfrak{C}}$, $V_{\overline{\mathfrak{C}}}$, $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}}$ Teiler der zu $\tilde{G}(r_2'')$ gehörigen.

Man beachte, daß für $r' \to r^*$ im allgemeinen $\varepsilon(r'') \to 0$ streben wird. Das ist sicher dann der Fall, wenn zwei $\mathfrak{A}$-Bögen $[\tilde{A}_1(r^*)]$ und $[\tilde{A}_2(r^*)]$ auf

$\mathfrak{K}(r^*)$ zusammenhängen, aber in $\mathfrak{A}(r')$ $(r' > r^*)$ in verschiedenen Gruppen liegen.

IV. Die Gruppen $\tilde{g}(r^*)$ und $\tilde{G}(r^*)$.

[1] Es soll gezeigt werden: Wenn r^* existiert, so muß es notwendig zu M gehören. (Das steht aber im Widerspruch dazu, daß r^* — wenn es existiert — in N liegt.) Dieser Nachweis verlangt die Existenz eines $r^{**} < r^*$ und eines $\varepsilon > 0$, so daß für jeden Zyklus $\tilde{Z}(r^*)$ die Bedingungen 1. bis 3. (mit r^*, r^{**} statt r', r'') erfüllt sind. 1. gilt für alle r' $(T_1 < r' < T_2)$. Weiter sieht man sofort, daß die Gruppeneinteilung für alle $r' > r^*$ gleichbleibt, sobald nur $r' - r^*$ genügend klein ist. Durch $\tilde{g}(r^*) = \lim\limits_{r' \to r^*} \tilde{G}(r')$ $(r' > r^*)$ wird daher völlig eindeutig eine Einteilung der $\mathfrak{A}$-Bögen $[\tilde{A}(r^*)]$ erklärt; zu jeder $\tilde{g}(r^*)$ gehört ein durch $\tilde{\mathfrak{F}}_{g(r^*)} = \lim\limits_{r' \to r^*} \tilde{\mathfrak{F}}_{G(r')}$ erklärtes Flächenstück. Diese $\tilde{g}(r^*)$ stimmen im allgemeinen durchaus noch nicht mit den Gruppen $\tilde{G}(r^*)$ überein, welche aus den in 2. postulierten $\tilde{G}(r^{**})$ $(r^{**} < r^*)$ durch Grenzübergang hervorgehen. Die $\tilde{G}(r^*)$ werden folgendermaßen gebildet: Alle und nur diejenigen $\tilde{g}(r^*)$ gehören einer $\tilde{G}(r^*)$ an, welche sich zu einer Kette $\tilde{g}_1(r^*), \ldots, \tilde{g}_s(r^*)$ anordnen lassen, bei der $\tilde{g}_\sigma$ und $\tilde{g}_{\sigma+1}$ über einen Zyklus $\tilde{Z}(r^*)$ zusammenhängen. $\tilde{G}(r^*)$ besteht dann aus den $\tilde{Z}(r^*)$, die an den $\tilde{g}_\sigma(r^*)$ beteiligt sind und möglicherweise noch isolierten $\mathfrak{K}$-Bögen $\tilde{K}(r^*)$. — Es sei $r^{**} < r^*$. Aus $\tilde{G}(r^*)$ wird in $\mathfrak{A}(r^{**})$ die Gruppe $\tilde{G}(r^{**})$. Wenn 2. erfüllbar ist, so gehört zu $\tilde{G}(r^{**})$ ein singularitätenfreies Flächenstück $\tilde{\mathfrak{F}}_{G(r^{**})}$, welches die $\tilde{\mathfrak{F}}_{g(r^*)}$ enthalten muß. Dies ist natürlich nur dann möglich, wenn die $\tilde{\mathfrak{F}}_{g(r^*)}$ entweder alle „in $\mathfrak{B}$" oder alle „in $\overline{\mathfrak{B}}$" liegen (vgl. III 2.). *Diese für das Gelingen des Beweises entscheidende Tatsache möge zunächst bewiesen werden.*

[2] Es genügt offenbar, den Nachweis für zu benachbarten $\mathfrak{A}$-Bögen $\tilde{A}_1(r^*)$, $\tilde{A}_2(r^*)$ gehörige Flächenstücke $\tilde{\mathfrak{F}}_1, \tilde{\mathfrak{F}}_2$ zu führen. $\tilde{K}_{12}(r^*)$ sei ein sie verbindender $\mathfrak{K}$-Bogen. Man bette nun $\tilde{K}_{12}(r^*)$ gemäß (*) in einen Streifen $\tilde{\mathfrak{F}}_K \equiv (V_K = 0)$ ein. $\tilde{\mathfrak{F}}_K$ besteht in $\mathfrak{A}(r^*)$ aus einem Stück $\tilde{\mathfrak{F}}_{K\mathfrak{A}}$. Durch $\tilde{S}$ wird $\tilde{\mathfrak{F}}_{K\mathfrak{A}}$ in endlich viele Teile $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_l$ zerschnitten. Es ist $l \geqq 2$ (vgl. unten). Die Numerierung sei so gewählt, daß die $\tilde{f}_\lambda$ in der angegebenen Reihenfolge (längs $\mathfrak{A}$-Bögen) aneinandergrenzen und infolgedessen abwechselnd $\mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ angehören. Da nun laut Voraussetzung (vgl. III 2.) jeder $\mathfrak{A}$-Bogen $\tilde{A}(r^*)$ zum Rand genau eines Flächenstückes $\tilde{\mathfrak{F}}_{g(r^*)}$ gehört und sicher nicht im Inneren eines solchen Flächenstückes liegt, so folgt: Liegt $\tilde{f}_\lambda$ im Inneren eines $\tilde{\mathfrak{F}}_{g(r^*)}$, so gibt es kein $\tilde{\mathfrak{F}}_{g(r^*)} \supset \tilde{f}_{\lambda+1}$; und umgekehrt: Liegt $\tilde{f}_\lambda$ nicht im Inneren wenigstens eines $\tilde{\mathfrak{F}}_{g(r^*)}$, so gibt es sicher ein $\tilde{\mathfrak{F}}_{g(r^*)} \supset \tilde{f}_{\lambda+1}$. — Daher müssen alle $\tilde{\mathfrak{F}}_{g(r^*)}$, welche eines der $\tilde{f}_\lambda$ enthalten, entweder zugleich „in $\mathfrak{B}$" oder zugleich „in $\overline{\mathfrak{B}}$" liegen. Das gilt insbesondere für $\tilde{\mathfrak{F}}_1, \tilde{\mathfrak{F}}_2$, die beide notwendig je ein $\tilde{f}_\lambda$ enthalten. Denn $\tilde{A}_1 \cup \tilde{K}_{12} \cup \tilde{A}_2$ hängt zusammen. Liegen z. B. $\tilde{\mathfrak{F}}_1$ und $\tilde{\mathfrak{F}}_2$ „in $\mathfrak{B}$" und ist $\tilde{P}$ ein gemeinsamer Punkt von $\tilde{K}_{12}$ und $[\tilde{A}_2]$, und $\mathfrak{E}$ ein $\tilde{P}$ definierendes genügend kleines $\mathfrak{F}$-Element, so gehört $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r^*)$ zugleich zu $\tilde{\mathfrak{F}}_{K\mathfrak{A}}$ und $\tilde{\mathfrak{F}}_2$. $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r^*)$ gehört ganz zu $\tilde{\mathfrak{F}}_2$, wenn $\tilde{P}$ nicht in $[\tilde{A}_1]$ liegt.

Sonst hat es wenigstens ein vierdimensionales Stück mit $\tilde{\mathfrak{F}}_2$ gemeinsam. Gleichzeitig folgt $l \geqq 2$. — Die angegebene unerläßliche Bedingung ist also erfüllt.

[3] Die für $\tilde{K}_{12}$ angestellten Überlegungen lassen sich auch für die übrigen an den $\tilde{g}_\sigma$ beteiligten $\mathfrak{K}$-Bögen durchführen. $\tilde{K}_1 (r^*)$ sei ein nicht-isolierter $\mathfrak{K}$-Bogen aus $\tilde{G} (r^*)$. Er gehört also zu einer der $[\tilde{g}_\sigma]$ oder zu einem ihrer Verbindungszyklen. Man bette $\tilde{K}_1$ in einen Streifen $\tilde{\mathfrak{F}}_{K_1}$ ein. Da $\tilde{K}_1$ nicht isoliert ist, muß $\tilde{\mathfrak{F}}_{K_1 \mathfrak{A}}$ sicher ein Stück der $\tilde{\mathfrak{F}}_{g_\sigma}$ enthalten. Man schließt wie oben weiter: Liegen die $\tilde{\mathfrak{F}}_{g_\sigma}$ „in $\mathfrak{B}$" (bzw. „in $\overline{\mathfrak{B}}$"), so besteht $\tilde{\mathfrak{F}}_{K_1 \mathfrak{A}} \cap \mathfrak{B}$ (bzw. $\tilde{\mathfrak{F}}_{K_1 \mathfrak{A}} \cap \overline{\mathfrak{B}}$) *nur* aus $\tilde{\mathfrak{F}}_{g_\sigma}$-Stücken; umgekehrt hat $\tilde{\mathfrak{F}}_{K_1 \mathfrak{A}} \cap \overline{\mathfrak{B}}$ (bzw. $\tilde{\mathfrak{F}}_{K_1 \mathfrak{A}} \cap \mathfrak{B}$) keinen Punkt mit den $\tilde{\mathfrak{F}}_{g_\sigma}$ gemeinsam[7]).

[4] Damit wird die am Schluß von III angedeutete Schwierigkeit ($\lim\limits_{r' \to r^*} \varepsilon (r'') = 0$) wie folgt überwunden. Um Anschluß an die früheren Bezeichnungen zu bekommen, setzen wir $\mathfrak{C} (r^*) = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A} (r^*)$; $\overline{\mathfrak{C}} (r^*) = \overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{A} (r^*)$ oder $\mathfrak{C} (r^*) = \overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{A} (r^*)$; $\overline{\mathfrak{C}} (r^*) = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A} (r^*)$. Nach [2] gehört zu allen $\tilde{\mathfrak{F}}_{g_\sigma}$ dasselbe $\mathfrak{C} (r^*)$. In $\mathfrak{C} (r^*)$ werden die $\tilde{\mathfrak{F}}_{g_\sigma}$ durch eine zulässige $V_{\mathfrak{C}(r^*)}$ dargestellt. Nach [3] gibt es nun eine $\mathfrak{U}_\varepsilon \{K_1(r^*)\}$, so daß V_{K_1} in $\mathfrak{U}_\varepsilon \{K_1\} \cap \mathfrak{C} (r^*)$ Teiler ist von $V_{\mathfrak{C}(r^*)}$. Entsprechendes gilt für alle $\mathfrak{K}$-Bögen $\tilde{K}_j (r^*)$, die zu Zyklen $\tilde{Z} (r^*)$ gehören, welche an den $\tilde{g}_\sigma (r^*)$ beteiligt sind. Zu jedem Punkt R auf $\mathfrak{R} (r^*)$ gibt es also eine $\mathfrak{U}_R$, so daß in $\mathfrak{U}_R \cap \mathfrak{C} (r^*)$ das Produkt der V_{K_j} Teiler ist von $V_{\mathfrak{C}(r^*)}$. Äquivalenz braucht nicht zu bestehen[8]). Denn $\mathfrak{U}_R$ kann noch Stücke der $\tilde{\mathfrak{F}}_{g_\sigma}$ enthalten, die innerhalb $\mathfrak{U}_R \cap \mathfrak{A} (r^*)$ nicht mit dem Rande von $\tilde{\mathfrak{F}}_{g_\sigma}$ zusammenhängen. Diese Stücke werden ganz im Inneren desjenigen Flächenstückes $\tilde{\mathfrak{F}}_{G(r^{**})}$ liegen, in welches bei der Fortsetzung die $\tilde{\mathfrak{F}}_{g_\sigma}$ eingebettet werden. Sie werden (in der früheren Bezeichnung) dargestellt durch eine $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$, welche jedenfalls in $\mathfrak{U}_R \cap \mathfrak{A} (r^*)$ zulässig ist. Das Produkt $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}(r^*)} \times \Pi\, V_{K_j}$ ist dann in $\mathfrak{U}_R \cap \mathfrak{C} (r^*)$ äquivalent $V_{\mathfrak{C}(r^*)}$. Schließlich werden die in $\overline{\mathfrak{C}} (r^*)$ gelegenen inneren Teile der $\tilde{\mathfrak{F}}_{g_\sigma}$ vollständig durch eine in $\overline{\mathfrak{C}} (r^*)$ zulässige Verteilung $\overline{V}_{\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$ erfaßt, welche sich an $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$ anschließt. Zusammenfassend hat man:

Die Gruppen $\tilde{g}_\sigma (r^*)$, und nur sie mögen zu einer Gruppe $\tilde{G} (r^*)$ gehören; sie sollen also eine Kette bilden, deren Glieder über Zyklen $\tilde{Z} (r^*)$ miteinander zusammenhängen. — Dann gibt es eine $\mathfrak{U}_\varepsilon \{\mathfrak{R} (r^*)\}$, eine dort zulässige $V_{g(r^*)}$, eine in $\mathfrak{U}_\varepsilon \cap \mathfrak{A} (r^*)$ zulässige $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$, ferner eine in $\mathfrak{C} (r^*)$ zulässige $V_{\mathfrak{C}(r^*)}$ und eine in $\overline{\mathfrak{C}} (r^*)$ zulässige $\overline{V}_{\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$, so daß gilt: $\overline{V}_{\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$ äquivalent $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$ in $\mathfrak{U}_\varepsilon \cap \overline{\mathfrak{C}} (r^*)$; $V_{\mathfrak{C}(r^*)}$ äquivalent $V_{g(r^*)} \times V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$ in $\mathfrak{U}_\varepsilon \cap \mathfrak{C} (r^*)$. Hier stellt $V_{\mathfrak{C}(r^*)}$ die in $\mathfrak{C} (r^*)$ gelegenen Teile, $\overline{V}_{\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$ die in $\overline{\mathfrak{C}} (r^*)$ gelegenen Teile der $\tilde{\mathfrak{F}}_{g_\sigma}$ und $V_{g(r^*)}$ die Randstreifen der $\tilde{\mathfrak{F}}_{g_\sigma}$ genau dar. $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$ verbindet $V_{\mathfrak{C}(r^*)}$ mit $\overline{V}_{\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$.

V. Fortsetzung der Verteilungen auf die Kugeloberfläche $\mathfrak{K} (r^*)$.

Jetzt handelt es sich darum, diese Verteilungen auf die Kugeloberfläche $\mathfrak{K} (r^*)$ fortzusetzen. Sei $\mathfrak{L} (r^*) = [\mathfrak{R} (r^*)] \cap \mathfrak{K} (r^*)$, also die Gesamtheit der gemeinsamen Randpunkte von $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A} (r^*)$ und $\overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{A} (r^*)$ auf $\mathfrak{K} (r^*)$.

[7]) $\tilde{K}_1$ ist nicht der gleichbezeichnete Bogen der Skizze.

[8]) $\mathfrak{R} (r^*)$ ist der Durchschnitt der Ränder von $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A} (r^*)$ und $\overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{A} (r^*)$.

$V_{g(r^*)}$ braucht nicht fortgesetzt zu werden; diese Verteilung ist bereits in $\mathfrak{U}_\varepsilon\{\mathfrak{N}(r^*)\}$, erst recht also in $\mathfrak{U}_\varepsilon\{\mathfrak{L}(r^*)\}$ zulässig erklärt.

$V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$ ist zulässig in $\mathfrak{U}_\varepsilon\{\mathfrak{N}(r^*)\} \cap \mathfrak{A}(r^*)$, gestattet also nach Satz A Lokalfortsetzungen $(\mathfrak{U}_R, g_R)$ in alle Punkte R, die auf $\mathfrak{K}(r^*)$ im Inneren von $\mathfrak{U}_\varepsilon\{\mathfrak{N}(r^*)\}$ liegen. Da $\mathfrak{L}(r^*)$ abgeschlossen ist, bilden die $(\mathfrak{U}_R, g_R)$ in einer vollen Umgebung $\mathfrak{U}\{\mathfrak{L}(r^*)\}$ eine zulässige Verteilung $V^{*}_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$, welche in $\mathfrak{U}\{\mathfrak{L}(r^*)\} \cap \mathfrak{A}(r^*)$ äquivalent $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$ ist (Satz C).

$V_{\mathfrak{C}(r^*)}$ ist in $\mathfrak{C}(r^*)$ zulässig und in $\mathfrak{U}_\varepsilon\{\mathfrak{L}(r^*)\} \cap \mathfrak{C}(r^*)$ äquivalent $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}(r^*)} \times \times V_{g(r^*)}$. Sei $\mathfrak{N}(r^*)$ der auf $\mathfrak{K}(r^*)$ gelegene Teil des Randes von $\mathfrak{C}(r^*)$. In allen Punkten R von $\mathfrak{N}(r^*)$ existieren Lokalfortsetzungen $(\mathfrak{U}_R, g_R)$. Auf $\mathfrak{L}(r^*)$ nehme man die Ortsfunktionen von $V^{*}_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}(r^*)} \times V_{g(r^*)}$. In einer vollen Umgebung $\mathfrak{U}\{\mathfrak{N}(r^*)\}$ bilden die $(\mathfrak{U}_R, g_R)$ eine zulässige $V^{*}_{\mathfrak{C}(r^*)}$, welche in $\mathfrak{U}\{\mathfrak{N}(r^*)\} \cap \mathfrak{C}(r^*)$ zu $V_{\mathfrak{C}(r^*)}$, in $\mathfrak{U}\{\mathfrak{N}\} \cap \mathfrak{U}\{\mathfrak{L}\}$ zu $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}(r^*)} \times V_{g(r^*)}$ äquivalent ist.

Entsprechend läßt $\overline{V}_{\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$ sich in alle Punkte von $[\mathfrak{N}(r^*)]$ fortsetzen; hier ist $\overline{\mathfrak{N}}(r^*) = \{\mathfrak{K}(r^*) - \mathfrak{N}(r^*)\}$. So ergibt sich eine Verteilung $\overline{V}^{*}_{\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$, die in einer vollen Umgebung $\mathfrak{U}\{[\overline{\mathfrak{N}}]\}$ zulässig, in $\overline{\mathfrak{C}}(r^*) \cap \mathfrak{U}\{[\overline{\mathfrak{N}}]\}$ äquivalent $V_{\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$, und in $\mathfrak{U}\{[\overline{\mathfrak{N}}]\} \cap \mathfrak{U}\{\mathfrak{L}\}$ äquivalent $V^{*}_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}(r^*)}$ ist.

Schließlich sind die bisher noch nicht vollständig erfaßten (zu den Verbindungszyklen der $\tilde{g}_\sigma(r)$ gehörigen) $\mathfrak{K}$-Bögen $\tilde{K}(r^*)$ zu berücksichtigen. Sie werden durch Verteilungen V_K dargestellt, die sich den $V_{g(r^*)}$ anschließen, ohne die Äquivalenz zu stören. Denn sie sind in $\mathfrak{U}\{\mathfrak{L}\}$ Teiler von $V_{g(r^*)}$. Soweit diese $\tilde{K}(r^*)$ auf dem Rande von $\mathfrak{C}(r^*)$ verlaufen, sind die V_K in $\mathfrak{C}(r^*)$ Teiler von $V_{\mathfrak{C}(r^*)}$. Denn die $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{K\mathfrak{A}}$ schneiden $\mathfrak{C}(r^*)$ nur in Stücken der $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{g_\sigma(r^*)}$ (vgl. IV, [3]). Man braucht also im folgenden (für $r^{**} < r^*$) V_g in $\mathfrak{U}_\varepsilon\{\mathfrak{N}(r^{**})\}$ nur zu definieren als die Verteilung, welche dort sämtliche an den $\tilde{g}_\sigma(r^*)$ beteiligten $\tilde{Z}(r^{**})$ (d. h. genauer: die zugehörigen $\tilde{\mathfrak{F}}$-Streifen) genau darstellt; dann kann man zusammenfassend feststellen:

Es sei $r^{**} < r^*$ und $r^* - r^{**}$ hinreichend klein. $\mathfrak{N}(r^{**})$ sei der gemeinsame Teil des Randes von $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r^{**})$ und $\overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{A}(r^{**})$. Entweder für $\mathfrak{C}(r^{**}) = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r^{**})$; $\overline{\mathfrak{C}}(r^{**}) = \overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{A}(r^{**})$ oder für $\mathfrak{C}(r^{**}) = \overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{A}(r^{**})$; $\overline{\mathfrak{C}}(r^{**}) = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r^{**})$ gibt es eine $\mathfrak{U}_\varepsilon\{\mathfrak{N}(r^{**})\}$ und Verteilungen V_g, $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}}$ in $\mathfrak{U}_\varepsilon$; $V_{\mathfrak{C}}$ in $\mathfrak{C}$; $\overline{V}_{\mathfrak{C}}$ in $\overline{\mathfrak{C}}$, so daß gilt: $V_{\mathfrak{C}}$ äquivalent $V_g \times V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}}$ in $\mathfrak{U}_\varepsilon \cap \mathfrak{C}$; $\overline{V}_{\overline{\mathfrak{C}}}$ äquivalent $V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}}$ in $\mathfrak{U}_\varepsilon \cap \overline{\mathfrak{C}}$. Durch diese Verteilungen werden in $\mathfrak{A}(r^*)$ genau die $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{g_\sigma(r^*)}$ dargestellt.

VI. Die Gruppe $\tilde{G}(r^{**})$ und das Flächenstück $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{G(r^{**})}$.

Die eben konstruierten Verteilungen entsprechen noch nicht genau der Gruppe $\tilde{G}(r^{**})$, in welcher die $\tilde{g}_\sigma(r^*)$ sich vereinigen. Das entsprechende Flächenstück, es möge $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}^{**}_g$ heißen, ist zwar algebraisch und hat in $\mathfrak{A}(r^*)$ genau die $\tilde{g}_\sigma$ als Rand. Aber $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}^{**}$ enthält im Inneren möglicherweise noch gewisse $\tilde{Z}(r^{**})$, die isolierte $\tilde{\mathfrak{K}}$-Bögen $K'(r^*)$ enthalten. In allen diesen Fällen schneide man die überflüssigen Teile von $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}^{**}_g$, die also von den betreffenden $\mathfrak{K}(r^*)$-Bögen begrenzt werden und in $\overline{\mathfrak{C}}(r^{**})$ liegen, heraus (vgl. die Skizze). Entsprechend ist die Verteilung $\overline{V}_{\overline{\mathfrak{C}}}$ zu reduzieren. Die Verteilung V_g ist zu ergänzen zur Verteilung $V_{G(r^{**})} = V_g \times \Pi\, V_{K'}$. Das nun entstandene Flächenstück $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}_{G(r^{**})}$ entspricht genau der Gruppe $\tilde{G}(r^{**})$, welche sich zusammensetzt

aus allen Zyklen $\tilde{Z}(r^{**})$, die an den $\tilde{g}_\sigma(r^*)$ beteiligt sind, und denjenigen Zyklen $\tilde{Z}'(r^{**})$, welche isolierte $\mathfrak{K}$-Bögen $\tilde{K}'(r^*)$ enthalten. $\mathfrak{F}_{G(r^{**})}$ hat in $\tilde{\mathfrak{A}}(r^{**})$ wie gefordert, nur $\mathfrak{A}$-Bögen $\tilde{A}(r^{**})$ als Rand, und kein $\mathfrak{A}$-Bogen $\tilde{A}(r^{**})$ liegt innerhalb $\tilde{\mathfrak{F}}_{G(r^{**})}$ (vgl. Beweis zu IV [2], [3]).

Damit sind diejenigen Flächenstücke $\tilde{\mathfrak{F}}_{G(r^{**})}$ vollständig erledigt, die überhaupt innere Punkte in $\mathfrak{A}(r^*)$ aufweisen.

VII. Isolierte $\tilde{\mathfrak{K}}(r^*)$-Bögen, die neue Gruppen $\tilde{G}(r^{**})$ erzeugen.

Bisher noch nicht erfaßt wurden diejenigen $\mathfrak{F}_{G(r^{**})}$, welche bei der Fortsetzung ins Innere von $\mathfrak{K}(r^*)$ neu entstehen. Die zugehörigen $\tilde{G}(r^{**})$ enthalten nur einen einzigen Zyklus $\tilde{Z}(r^{**})$, der aus einem isolierten $\mathfrak{K}(r^*)$-Bogen entsteht, und zwar dann, wenn dieser $\mathfrak{K}(r^*)$-Bogen noch nicht zum Rande eines der $\tilde{\mathfrak{F}}_{G(r^*)}$ gehört. Im Falle $r^* = T_2$ gibt es nur derartige isolierte $\mathfrak{K}(r^*)$-Bögen; denn bei $r^* = T_2$ beginnt ja die Konstruktion der Flächenstücke überhaupt erst.

Jeden solchen Bogen $\tilde{K}(r^*)$ bette man gemäß (*) in einen Streifen $\tilde{\mathfrak{F}}_K$ ein. Wieder bildet der in $\mathfrak{A}(r^*)$ gelegene Teil von $\tilde{\mathfrak{F}}_K$ ein einziges Flächenstück $\tilde{\mathfrak{F}}_{K\mathfrak{A}}$. Und zwar gehört $\tilde{\mathfrak{F}}_{K\mathfrak{A}}$ vollständig entweder zu $\mathfrak{B}$ oder zu $\overline{\mathfrak{B}}$. Denn würde $\tilde{\mathfrak{F}}_{K\mathfrak{A}}$ durch $\tilde{S}$ in mehrere Teile zerschnitten, so könnte $\tilde{K}(r^*)$ nicht isoliert sein. Man setze nun im folgenden $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r^{**})$; $\overline{\mathfrak{C}} = \overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{A}(r^{**})$, wenn $\mathfrak{F}_{K\mathfrak{A}}$ in $\overline{\mathfrak{B}}$, und $\mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{B}} \cap \mathfrak{A}(r^{**})$; $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}(r^{**})$, wenn $\tilde{\mathfrak{F}}_{K\mathfrak{A}}$ in $\mathfrak{B}$ liegt. Der in $\mathfrak{C}$ gelegene Teil $\tilde{\mathfrak{F}}_{K\mathfrak{C}}$ von $\tilde{\mathfrak{F}}_K$ schneidet dann $\mathfrak{A}(r^*)$ nicht; es gibt ein r^{**}, so daß die nicht zu $\tilde{S}$ gehörigen Randpunkte von $\tilde{\mathfrak{F}}_{K\mathfrak{C}}$ sämtlich in $\mathfrak{J}(r^{**})$ liegen. Nun braucht man nur zu setzen:

$$V_{\mathfrak{C}} = V_{K(r^*)}; \quad V_{G(r^{**})} = V_{K(r^*)} \text{ und } V_{\overline{\mathfrak{C}}} = V_{\mathfrak{C}\overline{\mathfrak{C}}} = \{g_P = 1\}.$$

Dann sind alle Bedingungen erfüllt.

Damit haben wir das Ergebnis: Wenn r^* existiert, so gibt es auch ein r^{**}, welches den Bedingungen III 1. – 3. genügt. Dann muß r^* also zu M gehören. Das ist jedoch unmöglich. Also ist N leer.

(Eingegangen am 30. März 1949.)

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN — DAVID HILBERT

OTTO BLUMENTHAL — ERICH HECKE

122. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

SPRINGER-VERLAG

1950/51

Druck der Brühlschen Universitätsdruckerei, Gießen.
Printed in Germany.

Inhalt des 122. Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)